2 القطوع المخروطية

نفهم الفكرة... ونحلّها خطوة خطوة.

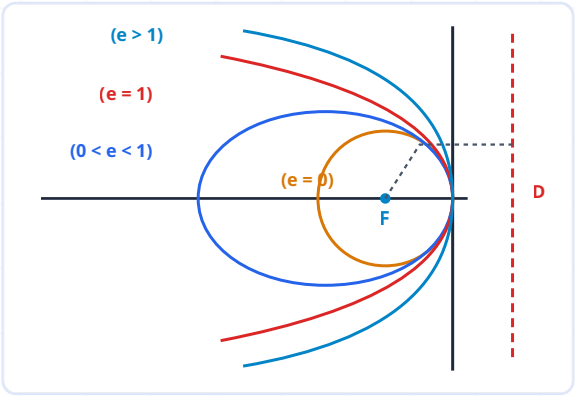


بداية الرحلة

من الرسم نقرأ الفكرة، وبالمعادلة نتحقّق منها.

مقدمة: القطع المخروطي

تعريف القطع المخروطي: ليكن (x_1, y_1) نقطة ثابتة في المستوي وليكن $ax + by + c = 0$ مستقيماً ثابتاً في المستوي نفسه، لذا فإن مجموعة كل النقاط التي نسبة بُعد كل منها عن النقطة (x_1, y_1) إلى بُعدها عن المستقيم $ax + by + c = 0$ تساوي عدداً ثابتاً (e) تكوّن شكلاً هندسياً يُسمى بالقطع المخروطي.



الدائرة $e = 0$ القطع الناقص $0 < e < 1$ القطع المكافئ $e = 1$ القطع الزائد $e > 1$ البؤرة F الدليل D

عناصر القطع المخروطي

1. **البؤرة:** $F(x_1, y_1)$
2. **معادلة الدليل:** $ax + by + c = 0$
3. **الاختلاف المركزي:** e هو نسبة بُعد النقطة عن البؤرة إلى بُعدها عن الدليل. وللقطع الناقص والزائد $e = \frac{c}{a}$، حيث c بُعد البؤرة عن المركز وa نصف المحور الرئيس. ويحدد e نوع القطع المخروطي:
   - $e = 0$: دائرة.
   - $0 < e < 1$: قطع ناقص.
   - $e = 1$: قطع مكافئ.
   - $e > 1$: قطع زائد.

4. **المسافة بين البؤرة والدليل (للقطع المكافئ):** $|2p|$.

المعادلة العامة للقطع المخروطي

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

ملاحظات أساسية

1. النقطة السينية (تقع على المحور السيني) إحداثيها الصادي يكون صفراً $(x,0)$.
2. النقطة الصادية (تقع على المحور الصادي) إحداثيها السيني يكون صفراً $(0,y)$.
3. كل مستقيم يوازي المحور السيني معادلته تكون ما يقطعه من المحور الصادي $(y=k)$.
4. كل مستقيم يوازي المحور الصادي معادلته تكون ما يقطعه من المحور السيني $(x=h)$.

أولاً: القطع المكافئ (Parabola)

تعريف القطع المكافئ: هو مجموعة النقط $M(x,y)$ في المستوي والتي يكون بُعدها عن نقطة ثابتة F تسمى **(البؤرة)** حيث $p\neq 0$، يساوي بُعدها عن مستقيم معلوم يسمى **(الدليل** $\overleftrightarrow{D}$**)** وهو لا يحتوي البؤرة.

حالات القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل $(0,0)$

الحالة الأولى: البؤرة تقع على محور السينات (axis-x) والرأس في نقطة الأصل

1- الفتحة نحو اليمين $(p>0)$

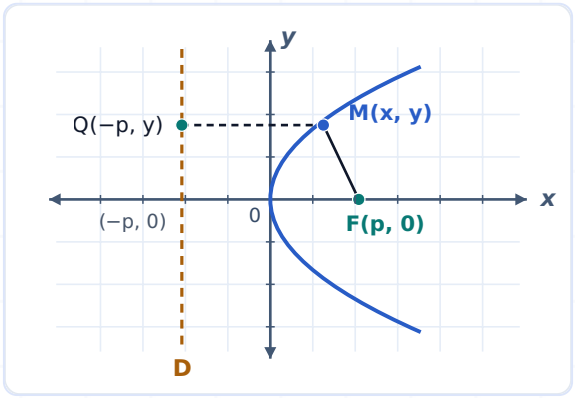
- من تعريف القطع المكافئ: $\frac{MF}{MQ}=e=1 \implies MF=MQ$.
- باستخدام قانون البعد $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ بين النقطة $M(x,y)$ والبؤرة $F(p,0)$ ونقطة الدليل $Q(-p,y)$:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2px+p^2 \implies y^2=4px \quad (\forall p>0)$$

- **معادلة القطع المكافئ:** $y^2=4px$
- **معادلة الدليل:** $x=-p$



F البؤرة M نقطة على المنحنى Q قدم العمود على الدليل D الدليل

2- الفتحة نحو اليسار ($p > 0$)

- **معادلة القطع المكافئ:** $y^2 = -4px$
- **معادلة الدليل:** $x = p$

الحالة الثانية: البؤرة تقع على محور الصادات (y-axis) والرأس في نقطة الأصل

(تكون هنا معادلة القطع دالة حقيقية)

1- الفتحة نحو الأعلى ($p > 0$)

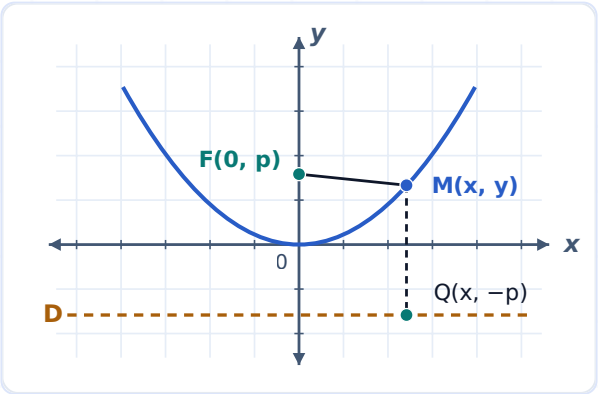
- من تعريف القطع المكافئ $MF = MQ$ حيث $F(0,p)$ و $Q(x,-p)$:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2 \implies x^2 = 4py \quad (\forall p > 0)$$

- **معادلة القطع المكافئ:** $x^2 = 4py$
- **معادلة الدليل:** $y = -p$



F البؤرة M نقطة على المنحنى Q قدم العمود على الدليل D الدليل

2- الفتحة نحو الأسفل ($p > 0$)

- **معادلة القطع المكافئ:** $x^2 = -4py$
- **معادلة الدليل:** $y = p$

مقارنة بين معادلتي القطع المكافئ (رأسه نقطة الأصل)

عندما يكون على محور السينات (axis-x)	عندما يكون على محور الصادات (axis-y)
1. البؤرة تنتمي لمحور السينات (axis-x)	1. البؤرة تنتمي لمحور الصادات (axis-y)
2. البؤرة $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x = -p$	2. البؤرة $F(0,p)$ ومعادلة الدليل $y = -p$
3. معادلة محور القطع هي $y = 0$	3. معادلة محور القطع هي $x = 0$
4. الدليل يوازي المحور الصادي	4. الدليل يوازي المحور السيني
5. التناظر حول محور السينات	5. التناظر حول محور الصادات
6. المحور السيني ينصف الدليل	6. المحور الصادي ينصف الدليل
القانون: $y^2 = 4px$	القانون: $x^2 = 4py$

ملاحظات عامة

1. إشارة البؤرة عكس إشارة الدليل والعكس صحيح.
2. المسافة بين البؤرة والدليل تساوي $2|p|$.
3. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ فهي تحقق معادلته (أي أن القطع المكافئ يمر بها).
4. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ بُعدها عن البؤرة يساوي بُعدها عن الدليل.
5. رأس القطع المكافئ هو نقطة الأصل ومعادلة المميز الخاصة به هي $b^2 - 4ac = 0$.

جدول يظهر جميع حالات القطع المكافئ (رأسه نقطة الأصل)

المعادلة	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه القطع	التناظر
$y^2 = 4px$	$F(p,0)$	$x = -p$	x	يمين	axis-x
$y^2 = -4px$	$F(-p,0)$	$x = p$	x	يسار	axis-x
$x^2 = 4py$	$F(0,p)$	$y = -p$	y	أعلى	axis-y
$x^2 = -4py$	$F(0,-p)$	$y = p$	y	أسفل	axis-y

مثال جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ في كل مما يأتي:

(a) $y^2 = -8x$

الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $y^2 = -4px$:

$$4p = 8 \implies p = \frac{8}{4} = 2$$

- البؤرة: $F(-p, 0) = F(-2, 0)$
- معادلة الدليل: $x = p \implies x = 2$

(b) $y^2 = 4x$

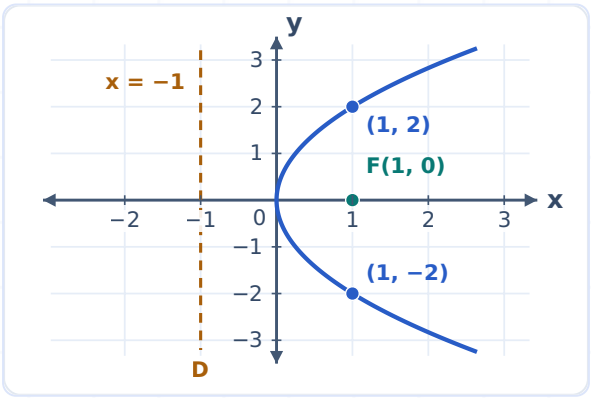
الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $y^2 = 4px$:

$$4p = 4 \implies p = \frac{4}{4} = 1$$

- البؤرة: $F(p, 0) = F(1, 0)$
- معادلة الدليل: $x = -p \implies x = -1$
- جدول نقاط الرسم ($y = \pm 2\sqrt{x}$):

x	0	1	2
y	0	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$



F البؤرة D الدليل

ملاحظات وأمثلة لإيجاد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل

أولاً وثانياً: إذا عُلمت البؤرة أو معادلة الدليل

- **أولاً:** إذا عُلمت بؤرة القطع المكافئ فإن الحل يكون بشكل مباشر؛ نستخرج قيمة p ونكتب المعادلة المناسبة ونعوض.
- **ثانياً:** إذا عُلمت معادلة الدليل فإن البؤرة ستكون على نفس المحور الذي يقطعه الدليل بالاتجاه الآخر، فنستخرج إحداثي البؤرة ثم قيمة p ونكتب المعادلة ونعوض.

مثال جد معادلة القطع المكافئ إذا علمت أن:

(أ) بؤرته هي $(3,0)$ ورأسه في نقطة الأصل.

الحل

البؤرة $(p,0)=(3,0) \implies p=3$، والمعادلة القياسية $y^2=4px$:

$$y^2=4(3)x \implies y^2=12x$$

(ب) معادلة الدليل $2x-6=0$ ورأسه في نقطة الأصل.

الحل

معادلة الدليل: $2x=6 \implies x=3 \implies p=3$ (البؤرة سينية سالبة)، المعادلة القياسية $y^2=-4px$:

$$y^2=-4(3)x \implies y^2=-12x$$

مثال جد معادلة القطع المكافئ إذا عُلم:

(أ) بؤرته $(0,5)$ ورأسه في نقطة الأصل.

الحل

البؤرة $(0,p)=(0,5) \implies p=5$، المعادلة القياسية $x^2=4py$:

$$x^2=4(5)y \implies x^2=20y$$

(ب) معادلة الدليل $y=7$ ورأسه في نقطة الأصل.

الحل

بالمقارنة مع $y=p \implies p=7$، المعادلة القياسية $x^2=-4py$:

$$x^2=-4(7)y \implies x^2=-28y$$

ثالثاً: إذا مر القطع المكافئ بنقطة معينة

إذا مر القطع المكافئ بنقطة معينة فإنها تحقق معادلته؛ فإذا كانت البؤرة تنتمي لمحور السينات نكتب إحدى معادلتي محور السينات ونعوض لإيجاد p، وإذا كانت البؤرة تنتمي لمحور الصادات نكتب إحدى معادلتي محور الصادات ونعوض، وفي حالة لم يحدد موقع البؤرة نأخذ الاحتمالين معاً.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(2, 4)$.

الحل

بما أن النقطة تقع بالربع الأول والبؤرة على محور السينات، فالبؤرة على محور السينات الموجب:

$$y^2 = 4px \implies (4)^2 = 4p(2) \implies 16 = 8p \implies p = 2 \implies y^2 = 8x$$

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور الصادات ويمر بالنقطة $(-1, -4)$.

الحل

بما أن النقطة تقع بالربع الثالث والبؤرة على محور الصادات، فالبؤرة على محور الصادات السالب:

$$x^2 = -4py \implies (-1)^2 = -4p(-4) \implies 1 = 16p \implies p = \frac{1}{16} \implies x^2 = -\frac{1}{4}y$$

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(-2, 6)$.

الحل

يوجد احتمالان لعدم تحديد موقع البؤرة:

1. **البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب ($x^2 = 4py$):**

$$(-2)^2 = 4p(6) \implies 4 = 24p \implies p = \frac{1}{6} \implies x^2 = 4\left(\frac{1}{6}\right)y \implies x^2 = \frac{2}{3}y$$

2. **البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب ($y^2 = -4px$):**

$$(6)^2 = -4p(-2) \implies 36 = 8p \implies p = \frac{9}{2} \implies y^2 = -4\left(\frac{9}{2}\right)x \implies y^2 = -18x$$

رابعاً: إذا مر القطع المكافئ بنقطتين تقعان في ربعين متجاورين

فإن البؤرة تقع على محور تناظر الربعين، فنكتب المعادلة المناسبة ونعوض أي نقطة من النقطتين لإيجاد p.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,4),(2,-4)$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل

النقطتان تقعان بالربعين الأول والرابع، إذن البؤرة على محور السينات الموجب:

$$y^2=4px \implies (4)^2=4p(2) \implies 16=8p \implies p=2 \implies y^2=8x$$

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $\left(\sqrt{6},-\frac{1}{2}\right),(-2\sqrt{3},-1)$.

الحل

النقطتان تقعان في الربعين الثالث والرابع، إذن البؤرة على محور الصادات السالب:

$$x^2=-4py \implies (\sqrt{6})^2=-4p\left(-\frac{1}{2}\right) \implies 6=2p \implies p=3 \implies x^2=-12y$$

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(4,-1),(-4,-1)$ والرأس في نقطة الأصل.

الحل

النقطتان تقعان في الربعين الثالث والرابع، إذن البؤرة على محور الصادات السالب:

$$x^2=-4py \implies (-4)^2=-4p(-1) \implies 16=4p \implies p=4 \implies x^2=-16y$$

خامساً: إذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة معينة (a,b)

إذا كانت البؤرة تقع على محور السينات فإن معادلة الدليل هي $x=a$، وإذا كانت على محور الصادات فإن معادلة الدليل هي $y=b$، وفي حالة عدم تحديد موقع البؤرة نأخذ الاحتمالين معاً.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(-2,3)$.

الحل

معادلة الدليل $x=-2 \implies F(2,0) \implies p=2 \implies y^2=4px \implies y^2=8x$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي لمحور الصادات ودليله يمر بالنقطة $(2,-4)$.

الحل

معادلة الدليل $y=-4 \implies F(0,4) \implies p=4 \implies x^2=4py \implies x^2=16y$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليله بالنقطة $(3,-5)$.

الحل

يوجد احتمالان لعدم تحديد البؤرة:

1. **البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب** $(x^2=4py)$**:** الدليل $y=-5 \implies p=5 \implies F(0,5) \implies x^2=4(5)y \implies x^2=20y$.
2. **البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب** $(y^2=-4px)$**:** الدليل $x=3 \implies p=3 \implies F(-3,0) \implies y^2=-4(3)x \implies y^2=-12x$.

سادساً: إذا مر الدليل بنقطتين مختلفتين

فإن معادلة الدليل هي المسقط المتساوي من النقطتين $(x=\ldots$ أو $y=\ldots)$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية:

1. دليله يمر بالنقطتين $(-3,1),(-3,9)$ ورأسه نقطة الأصل:

الحل

معادلة الدليل هي $x=-3 \implies p=3 \implies F(3,0) \implies y^2=4px \implies y^2=12x$.

2. دليله يمر بالنقطتين $(-4,2),(-7,2)$ ورأسه نقطة الأصل:

الحل

معادلة الدليل هي $y=2 \implies p=2 \implies F(0,-2) \implies x^2=-4py \implies x^2=-8y$.

سابعاً: إذا مر الدليل بنقطة تقع على أحد المحورين الإحداثيين

فإن البؤرة تقع على نفس المحور بالاتجاه الآخر.

مثال جد معادلة القطع المكافئ في الحالات الآتية:

1. دليله يمر بالنقطة $(-4,0)$ ورأسه نقطة الأصل:

الحل

البؤرة $F(4,0) \implies p=4 \implies y^2=4px \implies y^2=16x$.

2. دليله يمر بنقطة تقاطع $2x+3y=12$ مع محور الصادات ورأسه نقطة الأصل:

الحل

عند $x=0 \implies 3y=12 \implies y=4$ (نقطة التقاطع $(0,4)$). إذن $F(0,-4) \implies p=4 \implies x^2=-4py \implies x^2=-16y$.

أمثلة منوعة على القطع المكافئ

مثال (باستخدام التعريف) باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ إذا عُلم أن بؤرته $(\sqrt{3}, 0)$ ورأسه في نقطة الأصل.

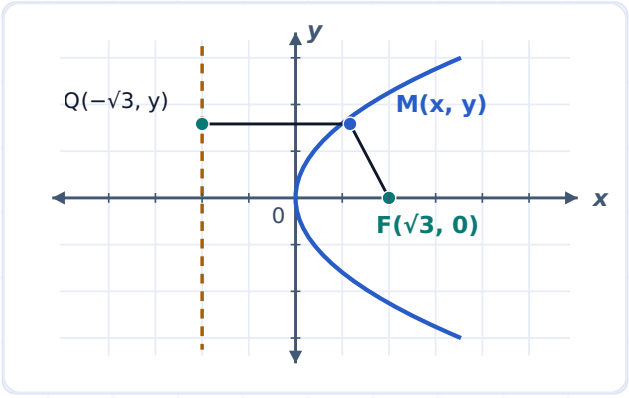
الحل

البؤرة $F(\sqrt{3}, 0)$، ولتكن $M(x, y)$ نقطة على القطع، و $Q(-\sqrt{3}, y)$ نقطة على الدليل:

$$MF = MQ \implies \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + (y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = (x+\sqrt{3})^2 \implies x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 \implies y^2 = 4\sqrt{3}x$$



F البؤرة M نقطة على المنحنى Q قدم العمود على الدليل

مثال جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $3x^2 - 24y = 0$.

الحل

$$3x^2 = 24y \xrightarrow{\div 3} x^2 = 8y$$

بالمقارنة مع $x^2 = 4py \implies 4p = 8 \implies p = 2$:

- البؤرة: $F(0, 2)$
- معادلة الدليل: $y = -2$

مثال جد البؤرة والدليل للقطع المكافئ $3y^2 = 16x - y^2$.

الحل

$$3y^2 + y^2 = 16x \implies 4y^2 = 16x \xrightarrow{\div 4} y^2 = 4x$$

بالمقارنة مع $y^2 = 4px \implies 4p = 4 \implies p = 1$:

- البؤرة: $F(1, 0)$
- معادلة الدليل: $x = -1$

مثال إذا كانت $x^2 - 2ky = 0$ تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته $(0, 1)$ فجد قيمة k.

الحل

البؤرة $(0, 1)$ صادية موجبة، إذن $x^2 = 4y \implies p = 1$. وبالمقارنة مع $x^2 = 2ky$:

$$2k = 4 \implies k = 2$$

مثال جد قيمة a من معادلة القطع المكافئ $\frac{1}{4}y^2 = ax$ رأسه نقطة الأصل ويمر دليله بالنقطة $(-6, 3)$.

الحل

$$\frac{1}{4}y^2 = ax \implies y^2 = 4ax$$

بما أن البؤرة تقع على محور السينات والدليل يمر بالنقطة $(-6, 3)$ فإن معادلة الدليل $x = -6 \implies p = 6$.
وبالمقارنة مع $y^2 = 4px$:

$$4a = 4p \implies a = p = 6$$

ملاحظات:

1. إذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_1, -y_1)$ فالبؤرة سينية.
2. إذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين $(x_1, y_1), (-x_1, y_1)$ فالبؤرة صادية.

واجبات H.W

[1] إذا كانت $y^2 - 4kx = 0$ تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته $(2, 0)$ فجد قيمة k.

[2] جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 1), (2, -1)$ والرأس في نقطة الأصل.

انسحاب المحاور للقطع المكافئ

نرمز إلى رأس القطع المكافئ المنسحب بـ $V(h,k)$، ويلخص الجدول الآتي جميع الحالات:

فتحة القطع	المحور الموازي	البؤرة	معادلة الدليل	معادلة المحور	معادلة القطع
يمين	x	$\overline{F}(p+h,k)$	$x=-p+h$	$y=k$	$(y-k)^2=4p(x-h)$
يسار	x	$\overline{F}(-p+h,k)$	$x=p+h$	$y=k$	$(y-k)^2=-4p(x-h)$
أعلى	y	$\overline{F}(h,p+k)$	$y=-p+k$	$x=h$	$(x-h)^2=4p(y-k)$
أسفل	y	$\overline{F}(h,-p+k)$	$y=p+k$	$x=h$	$(x-h)^2=-4p(y-k)$

مقارنة بين محوري الانسحاب للقطع المكافئ

عندما يوازي محور السينات (axis-x)	عندما يوازي محور الصادات (axis-y)
1. البؤرة $\overline{F}(p+h,k)$ ومعادلة الدليل $x=-p+h$	1. البؤرة $\overline{F}(h,p+k)$ ومعادلة الدليل $y=-p+k$
2. الدليل يوازي المحور الصادي	2. الدليل يوازي المحور السيني
3. الرأس والبؤرة على مستقيم يوازي المحور السيني	3. الرأس والبؤرة على مستقيم يوازي المحور الصادي
4. الرأس $V(h,k)$	4. الرأس $V(h,k)$
5. القانون: $(y-k)^2=4p(x-h)$	5. القانون: $(x-h)^2=4p(y-k)$
6. معادلة المحور: $y=k$	6. معادلة المحور: $x=h$

ملاحظة: الرأس هو منتصف البعد بين البؤرة والدليل: $x_{\text{الرأس}}=\frac{x_{\text{البؤرة}}+x_{\text{الدليل}}}{2}$ ، وكذلك $y_{\text{الرأس}}=\frac{y_{\text{البؤرة}}+y_{\text{الدليل}}}{2}$.

مثال عيّن الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل للقطع المكافئ: $(y+1)^2 = 4(x-2)$.

الحل

الفتحة نحو اليمين؛ بالمقارنة مع $(y-k)^2 = 4p(x-h)$:

- $h=2,\ k=-1$، إذن الرأس $\overline{V}(2,-1)$.
- $4p = 4 \implies p = 1$.
- البؤرة: $\overline{F}(p+h,k) = \overline{F}(1+2,-1) = \overline{F}(3,-1)$.
- معادلة المحور: $y = k \implies y = -1$.
- معادلة الدليل: $x = -p+h \implies x = -1+2 = 1$.

ملاحظة (إكمال المربع): في بعض الحالات نحتاج إلى التحويل لصيغة المربع الكامل لجعل المقارنة ممكنة؛ فإذا كانت المعادلة بالصورة $x^2+bx=c$ نضيف للطرفين مربع نصف معامل x أي $\left(\frac{b}{2}\right)^2$، ولا يصح هذا إلا إذا كان معامل $x^2 = 1$.

مثال ناقش القطع المكافئ: $x^2+4x+2y-2=0$.

الحل

$$x^2+4x = -2y+2 \implies x^2+4x+4 = -2y+2+4$$

$$(x+2)^2 = -2y+6 \implies (x+2)^2 = -2(y-3)$$

بالمقارنة مع $(x-h)^2 = -4p(y-k)$:

- الرأس: $\overline{V}(h,k) = (-2,3)$.
- $-4p = -2 \implies p = \frac{1}{2}$.
- البؤرة: $\overline{F}(h,-p+k) = \overline{F}\left(-2,-\frac{1}{2}+3\right) = \overline{F}\left(-2,\frac{5}{2}\right)$.
- معادلة المحور: $x = h \implies x = -2$.
- معادلة الدليل: $y = p+k \implies y = \frac{1}{2}+3 = \frac{7}{2}$.

مثال جد إحداثي الرأس والبؤرة ومعادلة محور القطع ومعادلة الدليل للقطع المكافئ: $3y^2 - 24y = 12x$.

الحل

$$\left[3y^2 - 24y = 12x\right] \div 3 \implies y^2 - 8y = 4x$$

$$y^2 - 8y + 16 = 4x + 16 \implies (y-4)^2 = 4(x+4)$$

بالمقارنة مع $(y-k)^2 = 4p(x-h)$:

- الرأس: $\overline{V}(-4,4)$.
- $4p = 4 \implies p = 1$.
- البؤرة: $\overline{F}(1-4,4) = \overline{F}(-3,4)$.
- معادلة المحور: $y = 4$.
- معادلة الدليل: $x = -1-4 = -5$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-1,3)$ ويمر بالنقطة $(3,5)$ ومحوره يوازي محور السينات.

الحل

المعادلة القياسية: $(y-3)^2 = 4p(x+1) \implies (y-k)^2 = 4p(x-h)$. نعوض النقطة $(3,5)$ لأنها تنتمي للقطع:

$$(5-3)^2 = 4p(3+1) \implies 4 = 16p \implies p = \frac{1}{4}$$

إذن المعادلة هي:

$$(y-3)^2 = (x+1)$$

مثال جد إحداثي الرأس والبؤرة ومعادلة محور القطع ومعادلة الدليل للقطع المكافئ: $y^2 + 8y - 8x + 24 = 0$.

الحل

$$y^2 + 8y = 8x - 24 \implies y^2 + 8y + 16 = 8x - 24 + 16 \implies (y+4)^2 = 8(x-1)$$

بالمقارنة مع $(y-k)^2 = 4p(x-h)$:

- الرأس: $\overline{V}(1,-4)$.
- $4p = 8 \implies p = 2$.
- البؤرة: $\overline{F}(2+1,-4) = \overline{F}(3,-4)$.
- معادلة المحور: $y = -4$.
- معادلة الدليل: $x = -2 + 1 = -1$.

ملاحظة: يمكننا استنتاج معادلة المحور مباشرة من الجزء الذي فيه تربيع في المعادلة، كما في الأمثلة الآتية:

- $(y-5)^2 = 6(x-2) \implies y = 5$
- $(x+2)^2 = 3(y-1) \implies x = -2$
- $x^2 = 12y \implies x = 0$
- $y^2 = -4x \implies y = 0$

حل تمارين (2 - 1)

س1 جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها:

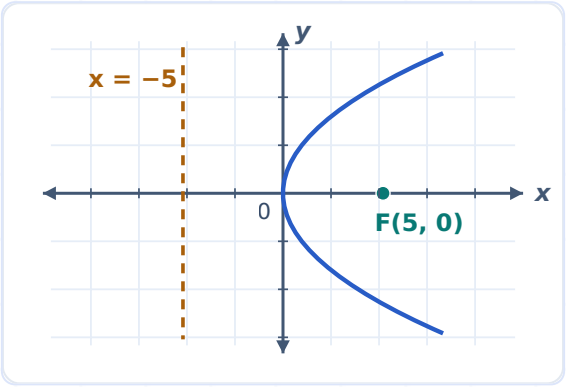
(أ) البؤرة $(5, 0)$ والرأس نقطة الأصل

الحل

البؤرة سينية موجبة (الفتحة نحو اليمين)، $p = 5$، إذن معادلة الدليل $x = -5$.

$$y^2 = 4px \implies y^2 = 4(5)x \implies y^2 = 20x$$

x	0	1	2	5
y	0	$\pm 2\sqrt{5}$	$\pm 2\sqrt{10}$	± 10



البؤرة F

متابعة السؤال

س1 جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها:

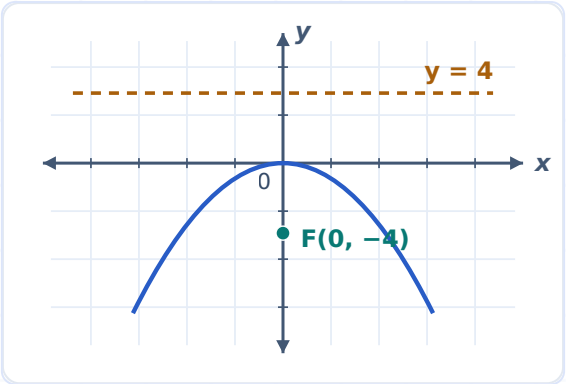
(ب) البؤرة $(0, -4)$ والرأس نقطة الأصل

الحل

البؤرة صادية سالبة (الفتحة نحو الأسفل)، $p = 4$، إذن معادلة الدليل $y = 4$.

$$x^2 = -4py \implies x^2 = -16y$$

x	0	± 4	$\pm 4\sqrt{2}$
y	0	-1	-2



البؤرة F

متابعة السؤال

س1 جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها:

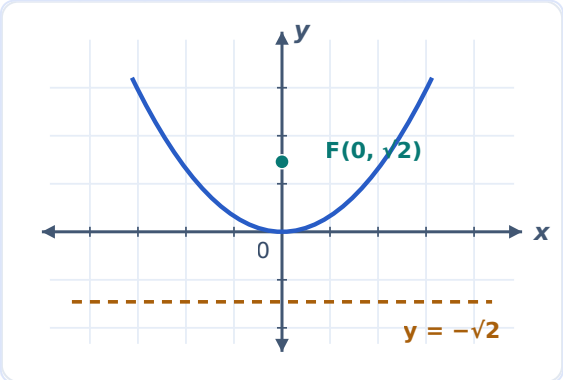
(ج) البؤرة $(0, \sqrt{2})$ والرأس نقطة الأصل

الحل

البؤرة صادية موجبة (الفتحة نحو الأعلى)، $p = \sqrt{2}$، إذن معادلة الدليل $y = -\sqrt{2}$.

$$x^2 = 4py \implies x^2 = 4\sqrt{2}y$$

x	0	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$



البؤرة F

متابعة السؤال

س1 جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها:

(د) معادلة دليل القطع المكافئ $4y+3=0$ والرأس في نقطة الأصل

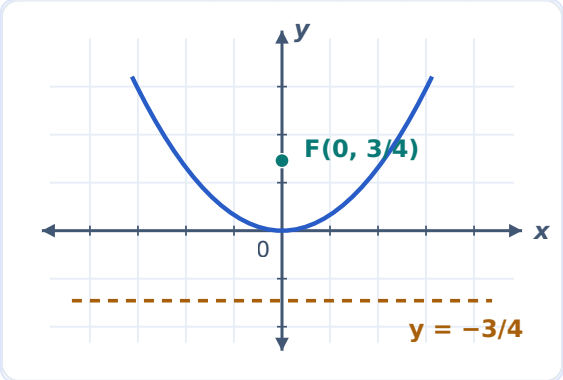
الحل

$$4y+3=0 \implies y=-\frac{3}{4} \implies p=\frac{3}{4}, \quad F\left(0,\frac{3}{4}\right)$$

البؤرة صادية موجبة (الفتحة نحو الأعلى):

$$x^2=4py \implies x^2=4\left(\frac{3}{4}\right)y \implies x^2=3y$$

x	0	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{6}$
y	0	1	2



F البؤرة

س2 في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ:

1. $x^2=4y$

الحل

بالمقارنة مع $(x-h)^2=4p(y-k)$ (الفتحة نحو الأعلى): $p=1 \implies 4p=4,\ k=0,\ h=0$.

- الرأس $V(0,0)$، البؤرة $F(0,1)$، معادلة المحور $x=0$، معادلة الدليل $y=-1$.

متابعة السؤال

س2 في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ:

2. $2x + 16y^2 = 0$

الحل

$y^2 = -\frac{1}{8}x$، بالمقارنة مع $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ (الفتحة نحو اليسار): $h = 0,\ k = 0,\ 4p = \frac{1}{8} \implies p = \frac{1}{32}$.

- الرأس $V(0,0)$، البؤرة $F\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$، معادلة المحور $y = 0$، معادلة الدليل $x = \frac{1}{32}$.

3. $y^2 = -4(x-2)$

الحل

بالمقارنة مع $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ (الفتحة نحو اليسار): $p = 1 \implies h = 2,\ k = 0,\ 4p = 4$.

- الرأس $V(2,0)$، البؤرة $F(-1+2,0) = F(1,0)$، معادلة المحور $y = 0$، معادلة الدليل $x = 1 + 2 = 3$.

4. $(x-1)^2 = 8(y-1)$

الحل

بالمقارنة مع $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ (الفتحة نحو الأعلى): $p = 2 \implies h = 1,\ k = 1,\ 4p = 8$.

- الرأس $V(1,1)$، البؤرة $F(1,3)$، معادلة المحور $x = 1$، معادلة الدليل $y = -2 + 1 = -1$.

5. $y^2 + 4y + 2x = -6$

الحل

$$y^2 + 4y = -2x - 6 \implies y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4 \implies (y+2)^2 = -2(x+1)$$

الفتحة نحو اليسار: $p = \frac{1}{2} \implies h = -1,\ k = -2,\ 4p = 2$.

- الرأس $V(-1,-2)$، البؤرة $F\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$، معادلة المحور $y = -2$، معادلة الدليل $x = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

6. $x^2 + 6x - y = 0$

الحل

$$x^2 + 6x = y \implies x^2 + 6x + 9 = y + 9 \implies (x+3)^2 = (y+9)$$

الفتحة نحو الأعلى: $p = \frac{1}{4} \implies h = -3,\ k = -9,\ 4p = 1$.

- الرأس $V(-3,-9)$، البؤرة $F\left(-3, -\frac{35}{4}\right)$، معادلة المحور $x = -3$، معادلة الدليل $y = -\frac{1}{4} - 9 = -\frac{37}{4}$.

س3 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,5),(2,-5)$ والرأس في نقطة الأصل.

الحل

الإحداثي السيني في النقطتين متساوٍ وموجب، إذن المعادلة سينية موجبة $y^2=4px$:

$$(5)^2=4p(2) \implies 25=8p \implies p=\frac{25}{8} \implies y^2=4\left(\frac{25}{8}\right)x \implies y^2=\frac{25}{2}x$$

س4 إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس في نقطة الأصل، جد معادلة القطع المكافئ علماً أن بؤرته تنتمي لأحد المحورين.

الحل

هنالك احتمالان:

- **البؤرة سينية:** معادلة الدليل $x=-3 \implies p=3 \implies y^2=4px \implies y^2=12x$.
- **البؤرة صادية:** معادلة الدليل $y=4 \implies p=4 \implies x^2=-4py \implies x^2=-16y$.



«كتاب الكون مكتوب بلغة الرياضيات، وحروفه مثلثات ودوائر وأشكال هندسية أخرى.»

غاليليو غاليلي
الفاحص، ١٦٢٣

س5 قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر بالنقطة $(1, 2)$، جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله ثم ارسم القطع.

الحل

النقطة $(1, 2)$ تحقق المعادلة:

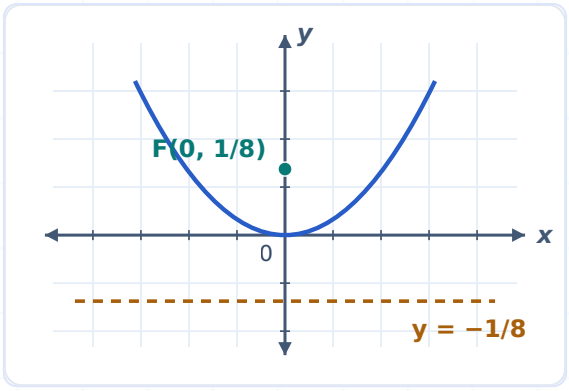
$$A(1)^2 + 8(2) = 0 \implies A = -16$$

$$-16x^2 + 8y = 0 \implies x^2 = \frac{1}{2}y$$

بالمقارنة مع $x^2 = 4py \implies 4p = \frac{1}{2} \implies p = \frac{1}{8}$ (الفتحة نحو الأعلى):

- البؤرة: $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$، معادلة الدليل: $y = -\frac{1}{8}$.

x	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	± 1
y	0	1	2



البؤرة F

س6 باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ:

1- البؤرة $(7,0)$ والرأس في نقطة الأصل

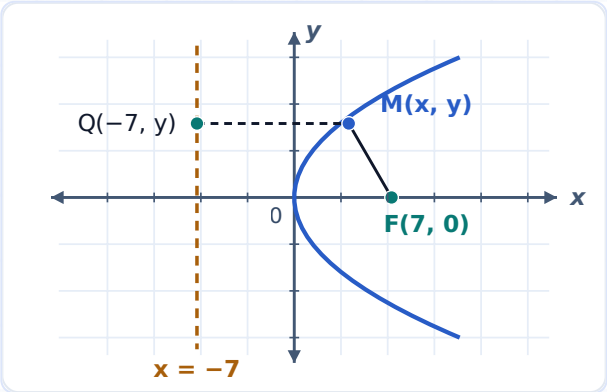
الحل

$p=7$، إذن معادلة الدليل $x=-7$، ونقطة الدليل $Q(-7,y)$:

$$MF=MQ \implies \sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+7)^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$x^2-14x+49+y^2=x^2+14x+49 \implies y^2=28x$$



F البؤرة M نقطة على المنحنى Q قدم العمود على الدليل

متابعة السؤال

س6 باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ:

2- معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ والرأس في نقطة الأصل

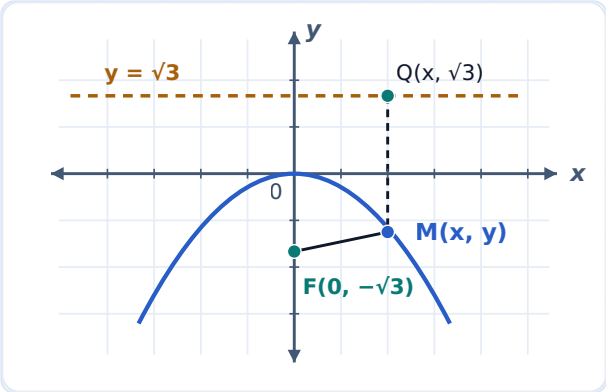
الحل

$p = \sqrt{3}$، إذن البؤرة $F(0, -\sqrt{3})$، ونقطة الدليل $Q(x, \sqrt{3})$:

$$MF = MQ \implies \sqrt{(x-0)^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 \implies x^2 = -4\sqrt{3}y$$



F البؤرة M نقطة على المنحنى Q قدم العمود على الدليل

أمثلة إضافية محلولة (القطع المكافئ)

مثال (1) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(11,-10),(-13,-10)$ والذي رأسه $(-1,2)$.

الحل

الإحداثي الصادي للنقطتين ثابت وهذا يدل على أن محور التماثل يوازي المحور الصادي، حيث $x=\frac{-13+11}{2}=-1$:

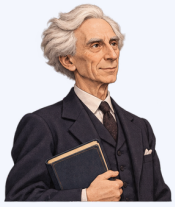
$$(x-h)^2=4p(y-k) \implies (x+1)^2=4p(y-2)$$

نعوض النقطة $(11,-10)$:

$$(11+1)^2=4p(-10-2) \implies 144=-48p \implies p=-3 \quad \text{(الفتحة نحو الأسفل)}$$

إذن المعادلة هي:

$$(x+1)^2=-12(y-2)$$



«الرياضيات، حين ننظر إليها حقّ النظر، فيها جمالٌ سامٍ.»

برتراند راسل

دراسة الرياضيات

مثال (2) النقط $(-12,-6),(4,-6),(0,0)$ تنتمي للقطع المكافئ $y=ax^2+bx+c$، جد إحداثي البؤرة ومعادلة الدليل والرأس والبعد البؤري (طول الوتر البؤري).

الحل

- نعوض $c=0 \implies (0,0)$.
- نعوض $\ldots(1)$ $16a+4b=-6 \xrightarrow{\div 2} 8a+2b=-3 \implies (4,-6)$.
- نعوض $\ldots(2)$ $144a-12b=-6 \xrightarrow{\div 6} 24a-2b=-1 \implies (-12,-6)$.

بجمع المعادلتين (1) و (2):

$$32a=-4 \implies a=-\frac{1}{8} \implies 8\left(-\frac{1}{8}\right)+2b=-3 \implies b=-1$$

إذن المعادلة هي:

$$y=-\frac{1}{8}x^2-x \implies 8y=-x^2-8x \implies x^2+8x=-8y$$

بإضافة 16 للطرفين:

$$x^2+8x+16=-8y+16 \implies (x+4)^2=-8(y-2)$$

بالمقارنة مع $(x-h)^2=-4p(y-k)$:

- الرأس: $\overline{V}(-4,2)$، و $p=2$.
- البؤرة: $\overline{F}(-4,-2+2)=\overline{F}(-4,0)$.
- معادلة المحور: $x=-4$، معادلة الدليل: $y=2+2=4$.
- طول الوتر البؤري: $4p=8$.

مثال (3) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية:

1. بؤرته $(5,0)$:

الحل

$$p=5 \implies y^2=20x.$$

2. بؤرته $(0,3)$:

الحل

$$p=3 \implies x^2=12y.$$

متابعة السؤال

مثال (3) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية:

3. معادلة دليله $2y - 6 = 0$:

الحل

$y = 3 \implies F(0,-3) \implies p = 3$ (الفتحة للأسفل)، إذن $x^2 = -12y$. $x^2 = -4py \implies$

4. بؤرته تنتمي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$:

الحل

$x^2 = 4py \implies (\sqrt{2})^2 = 4p\left(\frac{1}{2}\right) \implies 2 = 2p \implies p = 1 \implies x^2 = 4y.$

5. يمر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{5})$، جد معادلته ومعادلة دليله:

الحل

متناظرتان حول محور السينات الموجب، إذن $(2\sqrt{5})^2 = 4p(1) \implies p = 5$. $y^2 = 4px \implies$ معادلة القطع $y^2 = 20x$، ومعادلة الدليل $x = -5$.

6. بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(2, -4)$:

الحل

معادلة الدليل $x = 2 \implies F(-2,0) \implies p = 2$ (الفتحة نحو اليسار)، إذن $y^2 = -8x$. $y^2 = -4px \implies$

7. رأسه نقطة الأصل وبؤرته مركز الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$:

الحل

إحداثيا مركز الدائرة هما سالب نصف معامل كلٍّ من x وy. مركزها $(-\frac{0}{2}, -\frac{-4}{2}) = (0,2)$، ومنه $p = 2 \implies$ $x^2 = 8y$.

8. دليله يوازي المحور الصادي ومعادلة محوره $y = 0$ ويمر بالنقطة $(-2,1)$:

الحل

النقطة $(-2,1)$ في الربع الثاني والمحور هو محور السينات، إذن الفتحة نحو اليسار $y^2 = -4px$: $(1)^2 = -4p(-2) \implies 1 = 8p \implies p = \frac{1}{8} \implies y^2 = -\frac{1}{2}x$.

متابعة السؤال

مثال (3) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية:

9. يقطع من المستقيم $x = 4$ قطعة طولها 10 وحدات:

الحل

$2y = 10 \implies y = 5$، إذن نقطتا التقاطع $(4,5), (4,-5)$. التناظر حول محور السينات الموجب، إذن $y^2 = 4px \implies 25 = 16p \implies p = \frac{25}{16} \implies y^2 = \frac{25}{4}x$.

مثال (4) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية:

1. بؤرته الصيغة الديكارتية للعدد $z = \frac{-4+2i}{2-i}$:

الحل

$$z = \frac{-4+2i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{-8-4i+4i-2}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

وصيغته الديكارتية $(-2,0)$. إذن البؤرة $F(-2,0) \implies p = 2 \implies y^2 = -8x$.

2. بؤرته تنتمي لأحد المحورين ودليله يمر بالنقطة $(3,4)$:

الحل

- الدليل $x = 3 \implies F(-3,0) \implies y^2 = -12x$.
- الدليل $y = 4 \implies F(0,-4) \implies x^2 = -16y$.

3. يمر برؤوس المثلث ABC حيث $A(0,0), B(-2,4), C(2,m)$، ثم أوجد قيمة m:

الحل

البؤرة على محور الصادات الموجب $(x^2 = 4py)$، نعوض $B(-2,4)$: $(-2)^2 = 4p(4) \implies 4 = 16p \implies p = \frac{1}{4} \implies x^2 = y$. وبتعويض $C(2,m)$: $m = (2)^2 = 4$.

4. رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $2y + \sqrt{3} = 0$:

الحل

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies p = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies x^2 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y \implies x^2 = 2\sqrt{3}y.$$

واجبات (القطع المكافئ) H.W

[1] في كل مما يأتي جد البؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ:

1. $y^2 = -8(x-2)$
2. $x^2 + 4x - y = 0$
3. $x^2 + 28y = 0$

[2] إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(2,5)$ والرأس في نقطة الأصل فجد معادلته علماً أن بؤرته تنتمي لأحد المحورين.

[3] في كل مما يأتي جد معادلة القطع المكافئ الذي:

1. بؤرته $(\ldots)$ (مطموسة في الأصل) والرأس في نقطة الأصل.
2. معادلة الدليل له $2x - 3 = 0$ والرأس في نقطة الأصل.
3. بؤرته تنتمي لمحور السينات ويمر بالنقطة $(3,6)$ والرأس في نقطة الأصل.
4. بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(4,5)$ والرأس في نقطة الأصل.
5. معادلة الدليل له $2y + \sqrt{3} = 0$ والرأس في نقطة الأصل.

[4] إذا كانت النقطة $(2,4)$ تنتمي للقطع المكافئ $y^2 = (a+4)x$ فجد قيمة a ثم جد إحداثي البؤرة ومعادلة الدليل.

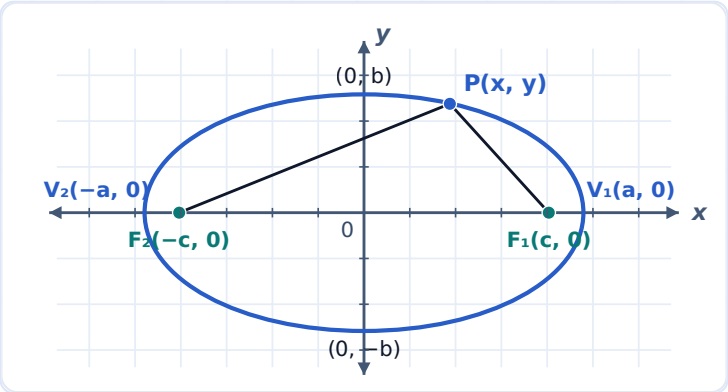
[5] باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي:

1. بؤرته $(4,0)$ والرأس في نقطة الأصل.
2. معادلة الدليل $y - 5 = 0$ والرأس في نقطة الأصل.

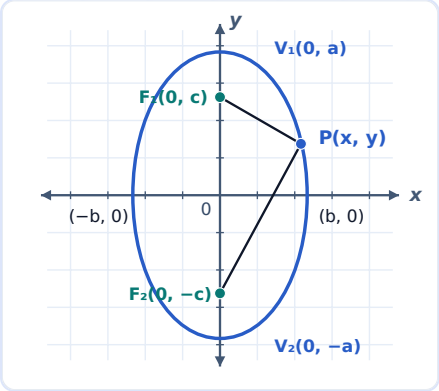
ثانياً: القطع الناقص (Ellipse)

تعريف القطع الناقص: هو مجموعة من النقط $P(x,y)$ في المستوي التي يكون مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان **(البؤرتان)** يساوي عدداً ثابتاً هو $(2a)$، أي:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$



طول المحور الكبير يساوي $2a$ طول المحور الصغير يساوي $2b$ البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2 نقطة على المنحنى P



البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2 نقطة على المنحنى P

مفردات القطع الناقص (مركزه نقطة الأصل)

الموقع	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة القياسية
البؤرتان على محور السينات	$F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$	$V_1(a,0),\ V_2(-a,0)$	$(0,b),\ (0,-b)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
البؤرتان على محور الصادات	$F_1(0,c),\ F_2(0,-c)$	$V_1(0,a),\ V_2(0,-a)$	$(b,0),\ (-b,0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

خواص القطع الناقص

1. دائماً $a > b$ و $a > c$ حيث $a, b, c > 0$.
2. العلاقة الأساسية: $c^2 = a^2 - b^2 \implies a^2 = b^2 + c^2$.
3. طول المحور الكبير يساوي $2a$ (العدد الثابت).
4. طول المحور الصغير يساوي $2b$.
5. المسافة بين البؤرتين تساوي $2c$ (البعد البؤري).
6. مساحة القطع الناقص: $A = ab\pi$ وحدة مربعة.
7. محيط القطع الناقص بالتقريب: $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
8. الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$، أي $(0 < e < 1)$.

9. النسبة بين طولي محوريه: $\frac{2a}{2b}$ أو $\frac{2b}{2a}$.
10. إذا مر القطع بنقطة أحد إحداثياتها صفر فالإحداثي الثاني هو إما a أو b والأكبر هو a والأصغر هو b.

ملاحظات هامة

1. إذا كان مقام x^2 أكبر فالبؤرتان سينيتان وتكون المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. إذا كان مقام y^2 أكبر فالبؤرتان صاديتان وتكون المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
3. الطرف الأيمن في معادلة القطع الناقص دائماً يساوي 1.
4. كل نقطة تنتمي إلى القطع الناقص تحقق معادلته.



«الرياضيات موسيقى العقل.»

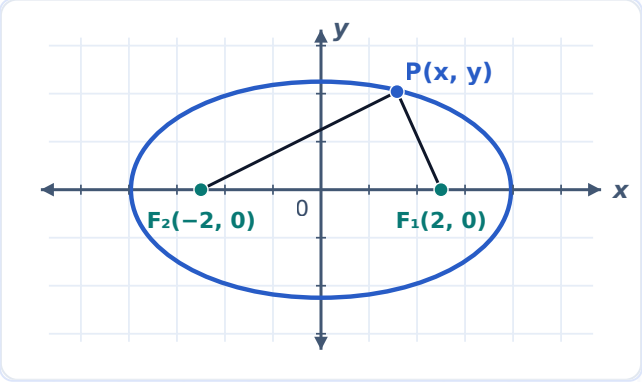
جيمس جوزيف سيلفستر

خطابه أمام الجمعية البريطانية لتقدّم العلوم، ١٨٦٩

أمثلة محلولة على القطع الناقص

مثال (باستخدام التعريف) باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2,0), F_2(-2,0)$ والعدد الثابت (6).

الحل



F_1, F_2 البؤرتان P نقطة على المنحنى

لتكن $P(x,y)$ نقطة تنتمي للقطع الناقص، من التعريف $PF_1 + PF_2 = 2a$:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$\left[12\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 36 + 8x\right] \div 4 \implies 3\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 9 + 2x$$

بتربيع الطرفين مرة ثانية:

$$9(x^2+4x+4+y^2) = 81 + 36x + 4x^2 \implies 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 = 81 + 36x + 4x^2$$

$$\left[5x^2 + 9y^2 = 45\right] \div 45 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

مثال في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين وإحداثيات كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي:

(1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

الحل

- $a^2=25 \implies a=5 \implies 2a=10$ (طول المحور الكبير)، والرأسان $V_1(5,0), V_2(-5,0)$.
- $b^2=16 \implies b=4 \implies 2b=8$ (طول المحور الصغير).
- $c^2=a^2-b^2=25-16=9 \implies c=3$، إذن البؤرتان $F_1(3,0), F_2(-3,0)$.
- الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}<1$.

(2) $4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

الحل

نضرب المعادلة في $\frac{3}{4}$:

$$3x^2+\frac{9}{4}y^2=1 \implies \frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$$

- $a^2=\frac{4}{9} \implies a=\frac{2}{3} \implies 2a=\frac{4}{3}$، والرأسان $V_1\left(0,\frac{2}{3}\right), V_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$.
- $b^2=\frac{1}{3} \implies b=\frac{1}{\sqrt{3}} \implies 2b=\frac{2}{\sqrt{3}}$.
- $c^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9} \implies c=\frac{1}{3}$، إذن البؤرتان $F_1\left(0,\frac{1}{3}\right), F_2\left(0,-\frac{1}{3}\right)$.
- الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}<1$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0), F_2(-3,0)$ ورأساه $V_1(5,0), V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الأصل.

الحل

البؤرتان على محور السينات، $c=3 \implies c^2=9$، $a=5 \implies a^2=25$:

$$b^2=a^2-c^2=25-9=16 \implies \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

مثال جد طول كل من المحورين وإحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي والمحيط والمساحة لمعادلة القطع الناقص $16x^2 + 25y^2 = 400$.

الحل

بالقسمة على 400: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- $a = 5 \implies 2a = 10$، $b = 4 \implies 2b = 8$، $c = \sqrt{25 - 16} = 3$.
- البؤرتان $F(\pm 3, 0)$، الرأسان $V(\pm 5, 0)$، $e = \frac{3}{5}$.
- المساحة: $A = ab\pi = 20\pi$ وحدة مربعة.
- المحيط بالتقريب: $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$ وحدة.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويقطع من محور السينات (8) وحدات ومن الصادات (12) وحدة، ثم جد المسافة بين بؤرتيه ومساحة منطقته ومحيطه واختلافه المركزي.

الحل

ما يقطعه من الصادات أكبر، إذن البؤرتان صاديتان:

- $2a = 12 \implies a = 6 \implies a^2 = 36$، و $2b = 8 \implies b = 4 \implies b^2 = 16$.
- المعادلة: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$.
- $c^2 = 36 - 16 = 20 \implies c = 2\sqrt{5} \implies 2c = 4\sqrt{5}$ (المسافة بين البؤرتين).
- المساحة: $A = 24\pi$ وحدة مربعة، المحيط بالتقريب: $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{26}$ ، الاختلاف المركزي: $e = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

ملاحظة: نقاط تقاطع القطع مع المحورين تمثل الرؤوس والأقطاب، والأبعد عن المركز هو الرأس.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(4, 0), (0, 3)$ ثم جد مساحته ومحيطه.

الحل

$a = 4,\ b = 3$، إذن المعادلة $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- $A = (4)(3)\pi = 12\pi$ وحدة مربعة.
- $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{16+9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25}{2}} = 5\sqrt{2}\pi$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(4,0)$ واختلافه المركزي $\frac{1}{2}$.

الحل

البؤرة سينية، $c=4 \implies c^2=16$:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \implies a=2c=8 \implies a^2=64, \quad b^2=64-16=48 \implies \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0,-3)$ والنسبة بين طولي محوريه $\frac{4}{5}$.

الحل

البؤرة صادية، $c=3 \implies c^2=9$.

$$\frac{2b}{2a}=\frac{4}{5} \implies b=\frac{4a}{5}$$

$$a^2=b^2+c^2 \implies a^2=\frac{16a^2}{25}+9 \xrightarrow{\times 25} 9a^2=225 \implies a^2=25 \implies a=5$$

$$b=\frac{4(5)}{5}=4 \implies b^2=16 \implies \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

مثال لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ ، جد قيمة k.

الحل

نقسم المعادلة على 36:

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$$

البؤرة سينية، إذن $c=\sqrt{3},\ b^2=9,\ a^2=\frac{36}{k}$:

$$c^2=a^2-b^2 \implies 3=\frac{36}{k}-9 \implies \frac{36}{k}=12 \implies k=3$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات، والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة.

الحل

$2c = 6 \implies c = 3$، و $2a - 2b = 2 \implies a - b = 1 \implies a = b + 1$.

$$a^2 = b^2 + c^2 \implies (b+1)^2 = b^2 + 9 \implies 2b + 1 = 9 \implies b = 4 \implies b^2 = 16$$

$$a = 5 \implies a^2 = 25 \implies \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات.

الحل

- من القطع المكافئ: $F(3,0) \implies p = 3 \implies 4p = 12 \implies y^2 = 12x$.
- في القطع الناقص: $c = 3 \implies c^2 = 9$، $2b = 10 \implies b = 5 \implies b^2 = 25$.

$$a^2 = b^2 + c^2 = 25 + 9 = 34 \implies \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 20x$، والنسبة بين طول محوره الصغير والبعد بين البؤرتين $\frac{4}{3}$.

الحل

- من القطع المكافئ: $F(5,0) \implies p = 5 \implies 4p = 20$.
- في القطع الناقص: الرأسان $V(\pm 5, 0) \implies a = 5$ (المعادلة سينية)، و $\frac{2b}{2c} = \frac{4}{3} \implies c = \frac{3b}{4}$.

$$a^2 = b^2 + c^2 \implies 25 = b^2 + \frac{9b^2}{16} \xrightarrow{\times 16} 400 = 25b^2 \implies b^2 = 16 \implies \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(0,4)$ ومجموع مربعي طولي محوريه 136.

الحل

$$(2a)^2+(2b)^2=136 \implies 4a^2+4b^2=136 \xrightarrow{\div 4} a^2+b^2=34 \implies a^2=34-b^2$$

ولدينا $c=4 \implies c^2=16$ (البؤرة صادية):

$$a^2=b^2+c^2 \implies 34-b^2=b^2+16 \implies 2b^2=18 \implies b^2=9 \implies a^2=25$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات وإحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالعددين $7,3$.

الحل

$$2a=7+3=10 \implies a=5 \implies a^2=25$$

$$2c=7-3=4 \implies c=2 \implies c^2=4$$

$$b^2=a^2-c^2=25-4=21 \implies \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان إلى محور السينات ويمر بالنقطتين $(2,2), \left(3,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

الحل

المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

- نعوض $(2,2)$: $\ldots(1)$ $\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \implies 4b^2+4a^2=a^2b^2$.
- نعوض $\left(3,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$: $\ldots(2)$ $\frac{9}{a^2}+\frac{\frac{6}{4}}{b^2}=1 \implies 9b^2+\frac{6}{4}a^2=a^2b^2$.

بطرح (2) من (1):

$$-5b^2+\frac{10}{4}a^2=0 \implies 10a^2=20b^2 \implies a^2=2b^2$$

بالتعويض في (1):

$$4b^2+8b^2=2b^4 \implies 12b^2=2b^4 \implies b^2=6 \implies a^2=12 \implies \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ ويمر بالنقطة $(3, 0)$.

الحل

- من القطع المكافئ: $F(-2, 0) \implies p = 2 \implies y^2 = -8x$.
- في القطع الناقص: البؤرتان $(\pm 2, 0) \implies c = 2$ (على محور السينات)، والنقطة $(3, 0)$ تقع على نفس المحور فهي رأس، إذن $a = 3$.

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرته بؤرة القطع المكافئ $2y^2 - 16x = 0$ ويمر بالنقطة $(0, -5)$.

الحل

- من القطع المكافئ: $F(2, 0) \implies p = 2 \implies y^2 = 8x$.
- في القطع الناقص: البؤرتان $(\pm 2, 0) \implies c = 2$ (على محور السينات)، والنقطة $(0, -5)$ تقع على المحور المخالف فهي قطب، إذن $b^2 = 25 \implies b = 5$.

$$a^2 = b^2 + c^2 = 25 + 4 = 29 \implies \frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمار ببؤرة القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$ والبعد بين بؤرتيه يساوي 6 وحدة طول.

الحل

- من القطع المكافئ: $F(0, -3) \implies p = 3 \implies x^2 = -12y$.
- في القطع الناقص: $c^2 = 9 \implies c = 3 \implies 2c = 6$. بما أن $a > c$ فلا يجوز أن تكون $(0, -3)$ رأساً (لأن 3 لا يمكن أن تكون أكبر من 3)، لذا فهي تمثل قطباً $b^2 = 9 \implies b = 3$، وتكون البؤرتان على محور السينات:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 9 = 18 \implies \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع المحورين الإحداثيين.

الحل

- عندما $(4, 0) \implies x = 4 \implies 2x = 8 \implies y = 0$.
- عندما $(0, -8) \implies y = -8 \implies -y = 8 \implies x = 0$.

الرأس يمثل النقطة ذات القيمة المطلقة الأكبر $(a = 8 \implies a^2 = 64$، على الصادات) والقطب يمثل الأصغر $(b = 4 \implies b^2 = 16)$:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور السينات حيث مساحة المنطقة لهذا القطع 24π.

الحل

عند $(6, 0) \implies x = 6 \implies 2x = 12 \implies y = 0$. من قانون المساحة $A = ab\pi$:

$$24\pi = 6b\pi \implies b = 4$$

بما أن $a = 6 > b$، فالمحور الكبير على محور السينات.

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = -24y$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$.

الحل

- من القطع المكافئ الأول: $x^2 = -24y \implies 4p = 24 \implies p = 6 \implies F(0, -6)$. إذن بؤرتا القطع الناقص $c^2 = 36 \implies c = 6 \implies (0, \pm 6)$ (صادية).
- من القطع المكافئ الثاني: $y^2 = -16x \implies 4p = 16 \implies p = 4$، إذن معادلة الدليل $x = 4$. إذن نقطة التماس $(4, 0)$ تمثل قطباً للقطع الناقص، إذن $b^2 = 16 \implies b = 4$.

$$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 36 = 52 \implies \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$$

ملاحظات لرسم القطع الناقص

1. نعين الرأسين $V_1(a, 0), V_2(-a, 0)$.
2. نعين القطبين $M_1(0, b), M_2(0, -b)$.

3. نصل بين النقاط الأربع V_1, M_1, V_2, M_2 بالترتيب لتكوين منحني متصل.
4. نعين البؤرتين $F_1(c,0), F_2(-c,0)$.

انسحاب المحاور للقطع الناقص

نرمز إلى مركز القطع الناقص المنسحب بـ (h,k)، ويلخص الجدول الآتي الحالتين:

الحالة	المركز	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة القياسية
المحور الكبير يوازي x	(h,k)	$\overline{F_1}(c+h,k)$ $\overline{F_2}(-c+h,k)$	$\overline{V_1}(a+h,k)$ $\overline{V_2}(-a+h,k)$	$(h,b+k)$ $(h,-b+k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
المحور الكبير يوازي y	(h,k)	$\overline{F_1}(h,c+k)$ $\overline{F_2}(h,-c+k)$	$\overline{V_1}(h,a+k)$ $\overline{V_2}(h,-a+k)$	$(b+h,k)$ $(-b+h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

ملاحظة: معادلة المحور الكبير تُؤخذ من البسط الذي مقامه أصغر، ومعادلة المحور الصغير تُؤخذ من البسط الذي مقامه أكبر. فمثلاً في المعادلة $\frac{(x-4)^2}{100}+\frac{(y+7)^2}{64}=1$: معادلة المحور الكبير $y=-7$، ومعادلة المحور الصغير $x=4$.

مثال **جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص:**

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

الحل

المحور الكبير يوازي محور السينات:

- المركز $(h,k)=(5,-4)$.
- $a^2=25 \implies a=5 \implies 2a=10$ (طول المحور الكبير).
- $b^2=16 \implies b=4 \implies 2b=8$ (طول المحور الصغير).
- $c^2=25-16=9 \implies c=3$.
- البؤرتان: $\overline{F_1}(8,-4),\ \overline{F_2}(2,-4)$.
- الرأسان: $\overline{V_1}(10,-4),\ \overline{V_2}(0,-4)$.
- القطبان: $\overline{P_1}(5,0),\ \overline{P_2}(5,-8)$.
- معادلة المحور الكبير $y=-4$، معادلة المحور الصغير $x=5$، الاختلاف المركزي $e=\frac{3}{5}$.

مثال جد البؤرتين والرأسين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص:

$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y = -4$

الحل

نكمل المربع لكل من x و y:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = -4$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = -4 + 4 + 36$$

$$\left[4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36\right] \div 36 \implies \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

- المركز $(h,k) = (1,-2)$، المحور الكبير يوازي محور السينات.
- $a = 3 \implies 2a = 6.\ b = 2 \implies 2b = 4.\ c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}.$
- البؤرتان: $\overline{F_1}(\sqrt{5}+1,-2),\ \overline{F_2}(-\sqrt{5}+1,-2)$.
- الرأسان: $\overline{V_1}(4,-2),\ \overline{V_2}(-2,-2)$.
- معادلة المحور الكبير $y = -2$، معادلة المحور الصغير $x = 1$، الاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

مراجعة عامة للقطع الناقص

1. نرتب الحدودية، نجعل معامل x^2 و y^2 يساوي 1 (بعد إخراج العامل المشترك عند إكمال المربع)، ونجعل الطرف الأيمن يساوي 1، ثم نقارن بالمعادلة القياسية.
2. مجموع طولي المحورين يساوي $2a + 2b$، والفرق بينهما يساوي $2a - 2b$.
3. النسبة بين طولي المحورين: إذا كان البسط أكبر من المقام فهي $\frac{2a}{2b}$، وإذا كان البسط أصغر من المقام فهي $\frac{2b}{2a}$.

حل تمارين (2 - 2)

س1 عيّن كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة الآتية:

(1) $x^2 + 2y^2 = 1$

الحل

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

- المركز $(0,0)$، البؤرتان على محور السينات.
- $a = 1 \implies 2a = 2, b = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies 2b = \sqrt{2}, c^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \implies c = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies 2c = \sqrt{2}.$
- البؤرتان $F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$، الرأسان $V(\pm 1, 0)$، القطبان $P\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- معادلة المحور الكبير $y = 0$، الصغير $x = 0$، الاختلاف المركزي $e = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

(2) $9x^2 + 13y^2 = 117$

الحل

بالقسمة على 117: $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- المركز $(0,0)$، البؤرتان على محور السينات.
- $a = \sqrt{13} \implies 2a = 2\sqrt{13}, b = 3 \implies 2b = 6, c = \sqrt{13 - 9} = 2 \implies 2c = 4.$
- البؤرتان $F(\pm 2, 0)$، الرأسان $V(\pm\sqrt{13}, 0)$، القطبان $P(0, \pm 3)$.
- معادلة المحور الكبير $y = 0$، الصغير $x = 0$، الاختلاف المركزي $e = \frac{2}{\sqrt{13}} < 1$.

(3) $\frac{(x-4)^2}{81} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

الحل

- المركز $(4, -1)$، المحور الكبير يوازي محور السينات.
- $a = 9 \implies 2a = 18, b = 5 \implies 2b = 10, c = \sqrt{81 - 25} = 2\sqrt{14} \implies 2c = 4\sqrt{14}.$
- البؤرتان $F_1(2\sqrt{14} + 4, -1)$، $F_2(-2\sqrt{14} + 4, -1)$.
- الرأسان $V_1(13, -1)$، $V_2(-5, -1)$، القطبان $P_1(4, 4)$، $P_2(4, -6)$.
- معادلة المحور الكبير $y = -1$، الصغير $x = 4$، الاختلاف المركزي $e = \frac{2\sqrt{14}}{9} < 1$.

متابعة السؤال

س1 عيّن كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة الآتية:

(4) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

الحل

- المركز $(-3,-2)$، المحور الكبير يوازي محور الصادات.
- $a=5 \implies 2a=10. b=3 \implies 2b=6. c=\sqrt{25-9}=4 \implies 2c=8.$
- البؤرتان $\overline{F_1}(-3,2),\ \overline{F_2}(-3,-6)$.
- الرأسان $\overline{V_1}(-3,3),\ \overline{V_2}(-3,-7)$، القطبان $\overline{P_1}(0,-2),\ \overline{P_2}(-6,-2)$.
- معادلة المحور الكبير $x=-3$، الصغير $y=-2$، الاختلاف المركزي $e=\frac{4}{5}<1$.

(5) $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$

الحل

$$(x^2+4x)+25(y^2-6y)=-204$$

$$(x^2+4x+4)+25(y^2-6y+9)=-204+4+225=25$$

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{1}=1$$

- المركز $(-2,3)$، المحور الكبير يوازي محور السينات.
- $a=5 \implies 2a=10. b=1 \implies 2b=2. c=\sqrt{25-1}=2\sqrt{6} \implies 2c=4\sqrt{6}.$
- البؤرتان $\overline{F_1}(2\sqrt{6}-2,3),\ \overline{F_2}(-2\sqrt{6}-2,3)$.
- الرأسان $\overline{V_1}(3,3),\ \overline{V_2}(-7,3)$، القطبان $\overline{P_1}(-2,4),\ \overline{P_2}(-2,2)$.
- معادلة المحور الكبير $y=3$، الصغير $x=-2$، الاختلاف المركزي $e=\frac{2\sqrt{6}}{5}<1$.

س2 جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل في كل مما يأتي:

1. البؤرتان $(5,0),(-5,0)$ وطول محوره الكبير 12 وحدة:

الحل

$$c=5 \implies c^2=25. 2a=12 \implies a=6 \implies a^2=36 \implies b^2=36-25=11.$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$$

متابعة السؤال

س2 جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل في كل مما يأتي:

2. البؤرتان $(0, \pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$:

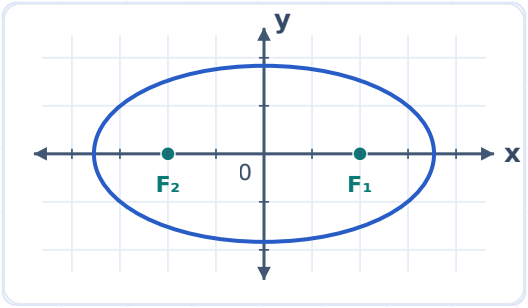
الحل

البؤرتان صاديتان، $c = 2 \implies c^2 = 4$، $a^2 = 16 + 4 = 20 \implies b^2 = 16 \implies b = 4$.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$$

3. إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $1, 5$ وحدة على الترتيب:

الحل



البؤرتان F_1, F_2

$$2a = 5 + 1 = 6 \implies a = 3 \implies a^2 = 9, \qquad 2c = 5 - 1 = 4 \implies c = 2 \implies c^2 = 4$$

$$b^2 = 9 - 4 = 5$$

يوجد احتمالان لعدم تحديد موقع البؤرتين:

- سينيتان: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$
- صاديتان: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. اختلافه المركزي $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير 12 وحدة:

الحل

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \implies a = 2c \implies a^2 = 4c^2$$، و $b^2 = 36 \implies b = 6 \implies 2b = 12$.

$$c^2 = 4c^2 - 36 \implies 3c^2 = 36 \implies c^2 = 12 \implies a^2 = 48$$

يوجد احتمالان: $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ أو $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$.

متابعة السؤال

س2 جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل في كل مما يأتي:

5. المسافة بين بؤرتيه 8 وحدات ونصف محوره الصغير 3 وحدات:

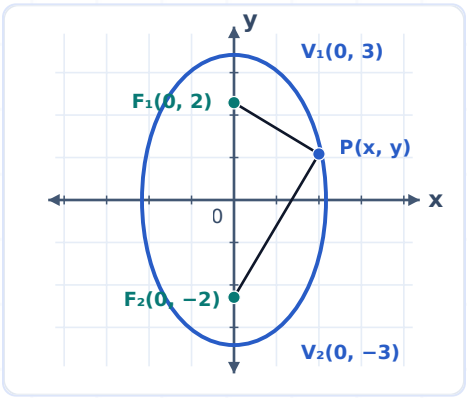
الحل

$2c = 8 \implies c = 4 \implies c^2 = 16$، $b = 3 \implies b^2 = 9 \implies a^2 = 9 + 16 = 25$. يوجد احتمالان: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ أو $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$.

س3 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص إذا عُلم:

1- بؤرتاه $(0, \pm 2)$ ورأساه $(0, \pm 3)$ ومركزه نقطة الأصل

الحل



F_1, F_2 البؤرتان V_1, V_2 الرأسان P نقطة على المنحنى

$c = 2,\ a = 3 \implies PF_1 + PF_2 = 6$:

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 6 \implies \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6 - \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

بتربيع الطرفين والتبسيط:

$$12\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 36 + 8y \xrightarrow{\div 4} 3\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 9 + 2y$$

بتربيع الطرفين مرة ثانية:

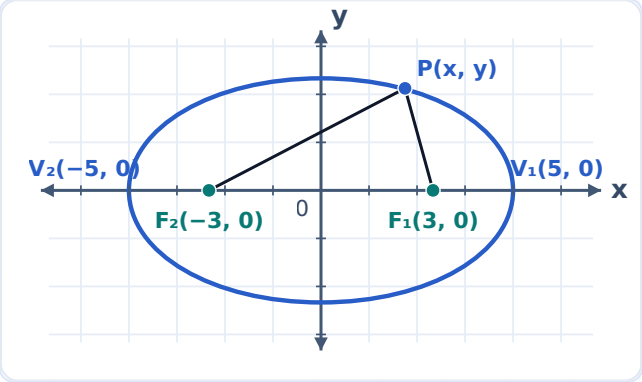
$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2 \implies 9x^2 + 5y^2 = 45 \implies \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

متابعة السؤال

س3 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص إذا عُلم:

2- المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

الحل



F_1, F_2 البؤرتان V_1, V_2 الرأسان P نقطة على المنحنى

$2c = 6 \implies c = 3$ (البؤرتان $(\pm 3, 0)$)، و $2a = 10 \implies a = 5$:

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

بتربيع الطرفين والتبسيط:

$$20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 100 + 12x \xrightarrow{\div 4} 5\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 25 + 3x$$

بتربيع الطرفين مرة ثانية:

$$25(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 625 + 150x + 9x^2 \implies 16x^2 + 25y^2 = 400 \implies \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

س4 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ ويمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

الحل

- من القطع المكافئ: $y^2 = -8x \implies p = 2 \implies F(-2, 0)$.
- في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + 4 \implies c^2 = 4 \implies c = 2$.
- نعوض $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ في $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\frac{12}{b^2+4} + \frac{3}{b^2} = 1 \implies 15b^2 + 12 = b^4 + 4b^2 \implies b^4 - 11b^2 - 12 = 0 \implies (b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0$$

إذن $b^2 = 12 \implies a^2 = 16$، والمعادلة: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

س5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6,2),(3,4)$.

الحل

نعوض النقطتين في $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \dots(1), \qquad \frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \quad \dots(2)$$

بضرب (1) في 4 وطرح (2) منها:

$$\frac{135}{a^2}=3 \implies a^2=45 \implies \frac{36}{45}+\frac{4}{b^2}=1 \implies \frac{4}{b^2}=\frac{1}{5} \implies b^2=20$$

المعادلة: $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$.

س6 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-16=3x$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.

الحل

- التقاطع مع محور الصادات $(x=0)$: $y=\pm4 \implies y^2=16$، إذن البؤرتان $(0,\pm4)$، إذن $c=4 \implies c^2=16$ (صادية).
- دليل القطع المكافئ $y^2=12x$: $x=-3 \implies p=3$، إذن نقطة التماس $(-3,0)$ تمثل قطباً، إذن $b^2=9$.

$$a^2=b^2+c^2=9+16=25 \implies \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

س7 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند $x=-2$.

الحل

- عند $x=-2$: $y=\pm4 \implies y^2-16=0$، إذن النقطتان $(-2,\pm4)$.
- $2a=2(2b) \implies a=2b \implies a^2=4b^2$.
- بالتعويض في $\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$$\frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \implies \frac{17}{b^2}=1 \implies b^2=17 \implies a^2=68 \implies \frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1$$

س8 قطع ناقص $hx^2+ky^2=36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه 60 وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2=4\sqrt{3}x$، ما قيمة كل من h,k؟

الحل

- من القطع المكافئ: $p=\sqrt{3} \implies F(\sqrt{3},0) \implies c^2=3$ (البؤرة سينية).
- $(2a)^2+(2b)^2=60 \implies a^2+b^2=15 \implies b^2=15-a^2.$
- $a^2=(15-a^2)+3 \implies 2a^2=18 \implies a^2=9,\ b^2=6.$
- بالمقارنة مع $\frac{x^2}{\frac{36}{h}}+\frac{y^2}{\frac{36}{k}}=1$:

$$\frac{36}{h}=9 \implies h=4, \qquad \frac{36}{k}=6 \implies k=6$$

س9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

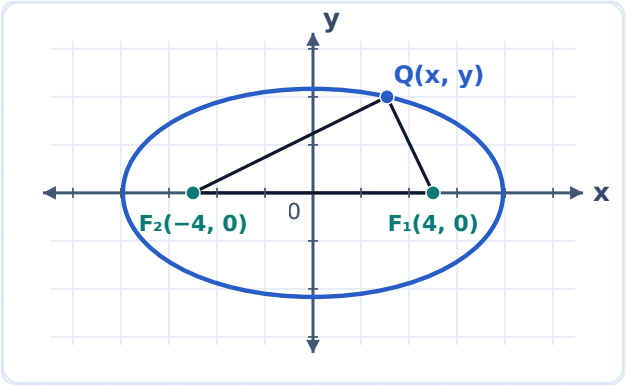
الحل

- من القطع المكافئ: $4p=24 \implies p=6 \implies F(0,6) \implies c^2=36$ (صادية).
- $2a+2b=36 \implies a=18-b.$
- $(18-b)^2=b^2+36 \implies 324-36b=36 \implies 36b=288 \implies b=8 \implies a=10.$

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$$

س10 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(4,0), F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي له بحيث محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة.

الحل



البؤرتان F_1, F_2 نقطة على المنحنى Q

البؤرتان سينيتان، إذن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$، و $2c=8 \implies c=4$. محيط المثلث يساوي $QF_1+QF_2+F_1F_2=2a+2c=24$:

$$2a+8=24 \implies 2a=16 \implies a=8 \implies a^2=64$$

$$b^2=a^2-c^2=64-16=48 \implies \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$$

أمثلة إضافية محلولة (القطع الناقص)

مثال (1) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومساحته 24π والنسبة بين طولي محوريه $\frac{3}{8}$.

الحل

$$A=ab\pi=24\pi \implies a=\frac{24}{b}, \qquad \frac{2b}{2a}=\frac{3}{8} \implies a=\frac{8b}{3}$$

$$\frac{24}{b}=\frac{8b}{3} \implies 8b^2=72 \implies b^2=9 \implies b=3 \implies a=8 \implies \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$$

مثال (2) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوراه ينطبقان على المحورين وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 12y = 0$ وطول محوره الكبير ضعف الصغير.

الحل

من القطع المكافئ $F(0,3) \implies p = 3 \implies x^2 = 12y$، إذن $c = 3$ (صادية). $a = 2b \implies (2b)^2 = b^2 + 9 \implies 3b^2 = 9 \implies b^2 = 3 \implies a^2 = 12 \implies \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$.

مثال (3) جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة $(0,3)$ والمسافة بين بؤرتيه 6 وحدات.

الحل

$2c = 6 \implies c = 3$. وبما أن $a > c$ فلا يمكن للنقطة $(0,3)$ أن تكون رأساً، بل هي حتماً قطب $(b = 3)$ على محور الصادات، مما يفرض أن تكون البؤرتان على محور السينات:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 9 = 18 \implies \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

مثال (4) لتكن $Mx^2 + Ny^2 = 400$ معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(3,0)$ والنسبة بين طول محوره الصغير إلى محوره الكبير $\frac{4}{5}$، جد قيمتي $M, N \in \mathbb{R}$.

الحل

بالقسمة على 400: $\frac{x^2}{\frac{400}{M}} + \frac{y^2}{\frac{400}{N}} = 1$. البؤرة سينية، $c = 3$، و $b^2 = \frac{16}{25}a^2 \implies \frac{2b}{2a} = \frac{4}{5}$:

$$a^2 = \frac{16}{25}a^2 + 9 \implies 9a^2 = 225 \implies a^2 = 25,\ b^2 = 16$$

$$M = \frac{400}{25} = 16, \qquad N = \frac{400}{16} = 25$$

مثال (5) جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته 80π والبعد بين بؤرتيه مساوياً للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ ودليله.

الحل

- من القطع المكافئ: $|2p| = 12 \implies p = 6 \implies 4p = 24 \implies y^2 = -24x$.
- في القطع الناقص: $2c = 12 \implies c = 6 \implies c^2 = 36$، و $b = \frac{80}{a} \implies ab\pi = 80\pi$.

$$a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36 \implies a^4 - 36a^2 - 6400 = 0 \implies (a^2 - 100)(a^2 + 64) = 0$$

إذن $a^2 = 100 \implies b^2 = 64$. وهنالك معادلتان لعدم تحديد موقع البؤرتين:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

مثال (6) إذا كانت $\frac{y^2}{3M-2} - x = 0$ معادلة قطع مكافئ دليله يمر بالنقطة $(-1, 2)$، جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0, M)$ ومربع النسبة بين طولي محوريه $\frac{3}{4}$.

الحل

- من القطع المكافئ: $y^2 = (3M-2)x$ (سيني)، ومعادلة الدليل $x = -1 \implies p = 1$.

$$3M - 2 = 4p = 4 \implies M = 2$$

- في القطع الناقص: البؤرتان $(0, \pm 2) \implies c^2 = 4$ (صادية)، و $\frac{4b^2}{4a^2} = \frac{3}{4} \implies b^2 = \frac{3}{4}a^2$:

$$a^2 = \frac{3}{4}a^2 + 4 \implies a^2 = 16,\ b^2 = 12 \implies \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال (7) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $F_1(-\sqrt{6}, 0), F_2(\sqrt{6}, 0)$ ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x + 2y - 11 = 0$.

الحل

- من القطع المكافئ: $y^2 + 2y + 1 = 12x + 12 \implies (y+1)^2 = 12(x+1)$. الرأس $(-1, -1)$ و $p = 3$، إذن البؤرة $\overline{F}(3-1, -1) = (2, -1)$.
- في القطع الناقص: $c^2 = 6 \implies a^2 = b^2 + 6$. نعوض $(2, -1)$ في $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\frac{4}{b^2+6} + \frac{1}{b^2} = 1 \implies 5b^2 + 6 = b^4 + 6b^2 \implies b^4 + b^2 - 6 = 0 \implies (b^2+3)(b^2-2) = 0$$

إذن $b^2 = 2 \implies a^2 = 8 \implies \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

مثال (8) جد إحداثي البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين ومقدار الاختلاف المركزي ومعادلة القطع الناقص الذي مركزه $(1, -4)$ ومحوره الكبير يوازي محور الصادات وإحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالبعدين $10, 2$ وحدة طول.

الحل

$$2a = 10 + 2 = 12 \implies a = 6 \implies a^2 = 36, \qquad 2c = 10 - 2 = 8 \implies c = 4 \implies c^2 = 16$$

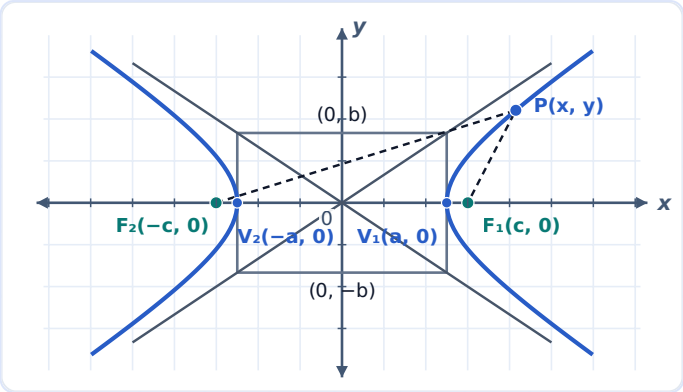
$$b^2 = 36 - 16 = 20 \implies b = 2\sqrt{5} \implies 2b = 4\sqrt{5}$$

- المعادلة: $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$.
- البؤرتان $\overline{F_1}(1, 0), \overline{F_2}(1, -8)$، الرأسان $\overline{V_1}(1, 2), \overline{V_2}(1, -10)$، القطبان $\overline{P_1}(1 + 2\sqrt{5}, -4), \overline{P_2}(1 - 2\sqrt{5}, -4)$.
- معادلة المحور الكبير $x = 1$، الصغير $y = -4$، الاختلاف المركزي $e = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

ثالثاً: القطع الزائد (Hyperbola)

تعريف القطع الزائد: هي مجموعة النقط $P(x,y)$ في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بُعدي أي منها عن نقطتين ثابتتين **(البؤرتان)** يساوي عدداً ثابتاً $(2a)$، أي:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$



طول المحور الحقيقي يساوي $2a$ طول المحور المرافق يساوي $2b$ البعد البؤري يساوي $2c$ البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2
P نقطة على المنحنى

مفردات القطع الزائد (مركزه نقطة الأصل)

الموقع	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة القياسية
البؤرتان على محور السينات	$F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$	$V_1(a,0),\ V_2(-a,0)$	$(0,b),\ (0,-b)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
البؤرتان على محور الصادات	$F_1(0,c),\ F_2(0,-c)$	$V_1(0,a),\ V_2(0,-a)$	$(b,0),\ (-b,0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ملاحظات هامة

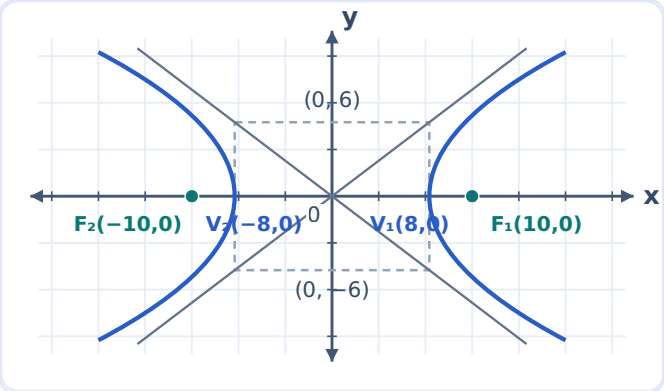
1. دائماً $c > a$ و $c > b$ حيث $a, b, c > 0$.
2. طول المحور الحقيقي يساوي $2a$ (العدد الثابت).
3. طول المحور التخيلي (المرافق) يساوي $2b$.
4. المسافة بين البؤرتين تساوي $2c$ (البعد البؤري).
5. الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} > 1$.
6. العلاقة الأساسية: $c^2 = a^2 + b^2$.
7. في المعادلة القياسية، إذا كان معامل x^2 موجبًا فبؤرتا القطع الزائد سينيتان، وإذا كان معامل y^2 موجبًا فهما صاديتان.
8. إذا مر القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل بنقطة على أحد المحورين الإحداثيين، فتلك النقطة أحد رأسيه.

أمثلة محلولة على القطع الزائد

مثال عيّن البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

الحل

- $a^2 = 64 \implies a = 8 \implies 2a = 16$ (طول المحور الحقيقي).
- $b^2 = 36 \implies b = 6 \implies 2b = 12$ (طول المحور المرافق).
- $c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \implies c = 10$.
- الرأسان $V_1(8,0), V_2(-8,0)$، القطبان $P_1(0,6), P_2(0,-6)$، البؤرتان $F_1(10,0), F_2(-10,0)$.



البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه $F_1(0,\sqrt{8}), F_2(0,-\sqrt{8})$.

الحل

البؤرتان صاديتان، $2b = 4 \implies b^2 = 4$، و $c^2 = 8$:

$$a^2 = c^2 - b^2 = 8 - 4 = 4 \implies \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

ملاحظة: في هذا المثال $a = b$ ويُسمى **القطع الزائد القائم** واختلافه المركزي ثابت يساوي $\sqrt{2}$ لأن النقاط الأربع تشكل رؤوس مربع.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي (2) والمسافة بين بؤرتيه (12) وبؤرتاه على محور الصادات.

الحل

$2c = 12 \implies c = 6, e = \frac{c}{a} = 2 \implies a = 3 \implies a^2 = 9, b^2 = 36 - 9 = 27$:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $(10, 0)$ والفرق بين طول محوره الحقيقي والتخيلي يساوي 4.

الحل

$c = 10 \implies c^2 = 100, 2a - 2b = 4 \implies a = b + 2$:

$100 = (b+2)^2 + b^2 \implies 2b^2 + 4b - 96 = 0 \implies b^2 + 2b - 48 = 0 \implies (b+8)(b-6) = 0$

إذن $b = 6 \implies b^2 = 36, a = 8 \implies a^2 = 64 \implies \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

مثال جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(0, -6)$ وأحد رأسيه $(0, 4)$.

الحل

بما أن $c = 6 > a = 4$ فهو **قطع زائد** صادي:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20 \implies \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 32x = 0$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه إلى طول محوره المرافق $\frac{5}{3}$.

الحل

من القطع المكافئ $y^2 = 32x \implies p = 8 \implies F(8, 0) \implies a = 8 \implies a^2 = 64$ (سيني).

$$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{3} \implies c = \frac{5b}{3} \implies \frac{25b^2}{9} = 64 + b^2 \implies 16b^2 = 576 \implies b^2 = 36 \implies \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ويمر بالنقطتين $(4\sqrt{2}, 3), \left(-5, \frac{9}{4}\right)$.

الحل

بالتعويض في $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$32b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \quad \dots(1), \qquad 25b^2 - \frac{81}{16}a^2 = a^2b^2 \quad \dots(2)$$

بطرح (2) من (1):

$$7b^2 - \frac{63}{16}a^2 = 0 \implies 112b^2 = 63a^2 \implies a^2 = \frac{16}{9}b^2$$

بالتعويض في (1):

$$32b^2 - 16b^2 = \frac{16}{9}b^4 \implies 16b^2 = \frac{16}{9}b^4 \implies b^2 = 9 \implies a^2 = 16 \implies \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(3, 0)$ والبعد بين بؤرتيه 10 وحدات.

الحل

النقطة $(3, 0)$ هي أحد الرأسين، إذن $a = 3 \implies a^2 = 9$ (سيني)، و $2c = 10 \implies c = 5 \implies c^2 = 25$:

$$b^2 = 25 - 9 = 16 \implies \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -40x$ والذي يمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$.

الحل

- من $y^2 = -40x$: $p = 10 \implies F(-10, 0) \implies c = 10 \implies c^2 = 100$ (سيني).
- من $y^2 = -16x$: $p = 4$، إذن الدليل $x = 4$، إذن نقطة التماس $(4, 0)$ هي الرأس، إذن $a = 4 \implies a^2 = 16$.

$$b^2 = 100 - 16 = 84 \implies \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1$$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $(0,-2\sqrt{5})$ وطول محوره الحقيقي (8) وحدات.

الحل

البؤرة صادية، $c^2=20$، $b^2=20-16=4 \implies a^2=16 \implies a=4 \implies 2a=8$:

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$$

انسحاب المحاور للقطع الزائد

نرمز إلى مركز القطع الزائد المنسحب بـ (h,k)، ويلخص الجدول الآتي الحالتين:

الحالة	المركز	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة القياسية
المحور الحقيقي يوازي x	(h,k)	 $\overline{F_1}(c+h,k)$ $\overline{F_2}(-c+h,k)$	 $\overline{V_1}(a+h,k)$ $\overline{V_2}(-a+h,k)$	 $(h,b+k)$ $(h,-b+k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
المحور الحقيقي يوازي y	(h,k)	 $\overline{F_1}(h,c+k)$ $\overline{F_2}(h,-c+k)$	 $\overline{V_1}(h,a+k)$ $\overline{V_2}(h,-a+k)$	 $(b+h,k)$ $(-b+h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

مثال **جد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي وطول المحورين للقطع الزائد:**

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

الحل

- المركز $(-2,1)$، $2a=6 \implies a=3$، $2b=4 \implies b=2$، $c=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.
- البؤرتان $\overline{F_1}(\sqrt{13}-2,1)$، $\overline{F_2}(-\sqrt{13}-2,1)$.
- الرأسان $\overline{V_1}(1,1)$، $\overline{V_2}(-5,1)$، الاختلاف المركزي $e=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$.

مثال جد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي للقطع الزائد: $4x^2 - 9y^2 - 16x - 54y = 101$.

الحل

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 6y + 9) = 101 + 16 - 81 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

- المركز $(2, -3)$، $a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{13}$.
- البؤرتان $\overline{F_1}(2 + \sqrt{13}, -3),\ \overline{F_2}(2 - \sqrt{13}, -3)$.
- الرأسان $\overline{V_1}(5, -3),\ \overline{V_2}(-1, -3)$، الاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

حل تمارين (2 - 3)

س1 عيّن كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الآتية:

(a) $12x^2 - 4y^2 = 48$

الحل

بالقسمة على 48: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

- $a = 2 \implies 2a = 4.\ b = 2\sqrt{3} \implies 2b = 4\sqrt{3}.\ c = \sqrt{4 + 12} = 4.$
- البؤرتان $F(\pm 4, 0)$، الرأسان $V(\pm 2, 0)$، $e = \frac{4}{2} = 2 > 1$.

(b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

الحل

بالقسمة على 144: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

- $a = 3 \implies 2a = 6.\ b = 4 \implies 2b = 8.\ c = \sqrt{9 + 16} = 5.$
- البؤرتان $F(\pm 5, 0)$، الرأسان $V(\pm 3, 0)$، $e = \frac{5}{3} > 1$.

© $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8$

الحل

بالقسمة على 8: $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$.

- المركز $(1, -1)$، $a = 2 \implies 2a = 4$، $b = \sqrt{2} \implies 2b = 2\sqrt{2}$، $c = \sqrt{6}$.
- البؤرتان $\overline{F_1}(1, \sqrt{6} - 1),\ \overline{F_2}(1, -\sqrt{6} - 1)$، الرأسان $\overline{V_1}(1, 1),\ \overline{V_2}(1, -3)$، $e = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$.

متابعة السؤال

س1 عيّن كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الآتية:

(d) $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

الحل

$$16(x^2 + 10x + 25) - 9(y^2 - 2y + 1) = 185 + 400 - 9 = 576$$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

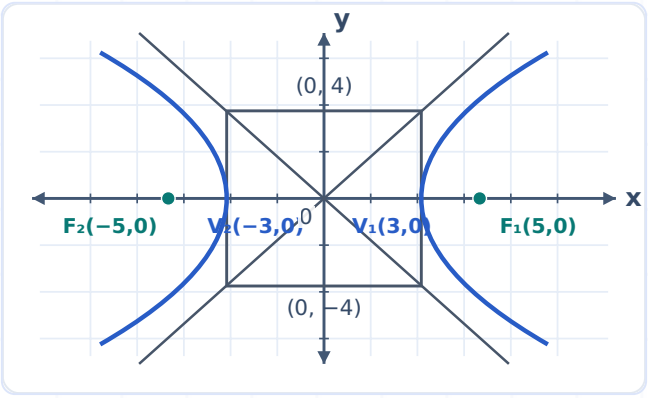
- المركز $(-5, 1)$، $a = 6 \implies 2a = 12$، $b = 8 \implies 2b = 16$، $c = 10$.
- البؤرتان $F_2(-15, 1)$، $F_1(5, 1)$، الرأسان $V_2(-11, 1)$، $V_1(1, 1)$، $e = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} > 1$.

س2 اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الآتية ثم ارسم القطع:

(أ) البؤرتان $(\pm 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$ ومركزه نقطة الأصل

الحل

$c = 5 \implies c^2 = 25$، $a = 3 \implies a^2 = 9 \implies b^2 = 16 \implies \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.



البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2

متابعة السؤال

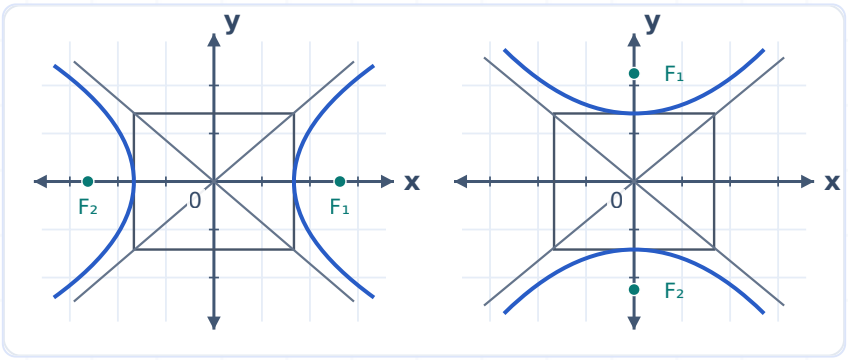
س2 اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الآتية ثم ارسم القطع:

(ب) طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدات وينطبق محوراه على المحورين ومركزه نقطة الأصل

الحل

$a = 6 \implies a^2 = 36$ ، $b = 5 \implies b^2 = 25$ ، $c^2 = 61$. يوجد احتمالان:

- البؤرتان سينيتان: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$
- البؤرتان صاديتان: $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$



البؤرتان F_1, F_2

متابعة السؤال

س2 اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الآتية ثم ارسم القطع:

(ج) مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ واختلافه المركزي (3)

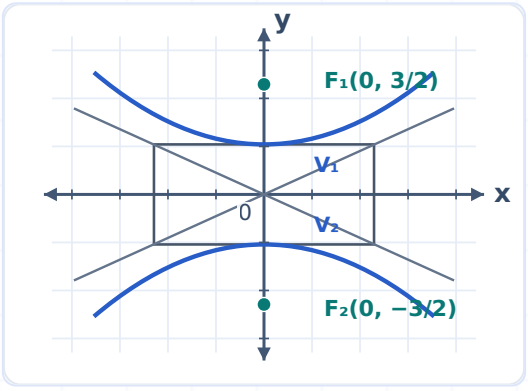
الحل

$b = \sqrt{2} \implies b^2 = 2$ و $e = \frac{c}{a} = 3 \implies c^2 = 9a^2$.

$$9a^2 = a^2 + 2 \implies 8a^2 = 2 \implies a^2 = \frac{1}{4}, \quad c^2 = \frac{9}{4}$$

البؤرتان $F\left(0, \pm\frac{3}{2}\right)$، الرأسان $V\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$، والمعادلة:

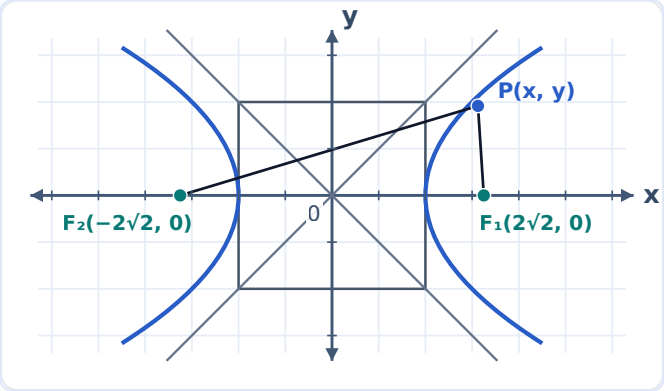
$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1 \implies 4y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$$



البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2

س3 جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ والقيمة المطلقة للفرق بين بُعدي أية نقطة منه عن بؤرتيه تساوي (4).

الحل



F_1, F_2 البؤرتان P نقطة على المنحنى

$$|PF_1 - PF_2| = 4 \implies PF_1 - PF_2 = \pm 4:$$

$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2}$$

بتربيع الطرفين والتبسيط:

$$\pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} = -8\sqrt{2}x - 16 \xrightarrow{\div 8} \mp\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} = \sqrt{2}x + 2$$

بتربيع الطرفين مرة ثانية:

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4 \implies x^2 - y^2 = 4 \implies \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

س4 قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{5})$، جد معادلتي القطعين.

الحل

- المكافئ: سيني موجب $(y^2 = 4px)$، نعوض $(1, 2\sqrt{5}) \implies 20 = 4p \implies p = 5 \implies y^2 = 20x$، والبؤرة $(5, 0)$.
- الزائد: $c = 5 \implies c^2 = 25$، $b^2 = 25 - 9 = 16 \implies a^2 = 9 \implies a = 3 \implies 2a = 6$.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

س5 قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $9x^2 + 16y^2 = 576$، جد قيمتي $h, k \in \mathbb{R}$.

الحل

- من الناقص: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \implies c^2 = 64 - 36 = 28$ (البؤرتان على محور السينات).
- في الزائد: $c^2 = 28$، $2a = 6\sqrt{2} \implies a = 3\sqrt{2} \implies a^2 = 18 \implies b^2 = 28 - 18 = 10$.
- بالمقارنة مع $\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$:

$$h = \frac{90}{18} = 5, \qquad k = \frac{90}{10} = 9$$

س6 اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين $1, 9$ وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين.

الحل

$$2c = 9 + 1 = 10 \implies c = 5 \implies c^2 = 25, \qquad 2a = 9 - 1 = 8 \implies a = 4 \implies a^2 = 16$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

يوجد احتمالان: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ أو $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.

س7 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل.

الحل

- من الزائد: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \implies c^2 = 12 + 4 = 16 \implies c = 4$ (سينية).
- في الناقص: $\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \implies a^2 = \frac{25}{9}b^2$:

$$\frac{25}{9}b^2 = b^2 + 16 \implies 16b^2 = 144 \implies b^2 = 9 \implies a^2 = 25 \implies \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

س8 النقطة $P(6, L)$ تنتمي إلى القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$، جد كلاً من: أ) قيمة L، ب) طول نصف القطر البؤري المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P.

الحل

- أ) نعوض $(6, L)$ في المعادلة:

$$36 - 3L^2 = 12 \implies 3L^2 = 24 \implies L^2 = 8 \implies L = \pm 2\sqrt{2}$$

- ب) البؤرة اليمنى: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \implies c = \sqrt{12+4} = 4 \implies F_1(4, 0)$.

$$PF_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (\pm 2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$ وحدة طول

س9 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$.

الحل

- من الناقص: $F(0, \pm 4) \implies c^2 = 25 - 9 = 16$ (صادية).
- من المكافئ: $x^2 = -12y \implies p = 3$، إذن معادلة الدليل $y = 3$، إذن نقطة التماس $(0, 3)$ هي الرأس، إذن $a^2 = 9 \implies a = 3$.

$$b^2 = 16 - 9 = 7 \implies \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$

أمثلة إضافية محلولة (القطع الزائد والربط بين القطوع)

مثال (1) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره الحقيقي 16 والنسبة بين المسافة بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي $\frac{5}{4}$.

الحل

$2a = 16 \implies a = 8 \implies a^2 = 64$، و $\frac{2c}{2a} = \frac{5}{4} \implies c = 10 \implies c^2 = 100$:

$$b^2 = 100 - 64 = 36 \implies \frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$

مثال (2) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 20y$ وطول محوره المرافق يساوي البعد بين بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

الحل

- من المكافئ: $p = 5 \implies F(0,5) \implies c = 5 \implies c^2 = 25$ (صادية).
- من الناقص: $b^2 = 7 \implies 2c = 2\sqrt{7} = 2b_{\text{زائد}} \implies c^2 = 16 - 9 = 7$.

$$a^2 = 25 - 7 = 18 \implies \frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{7} = 1$$

مثال (3) جد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطتين $(0, 3\sqrt{2}), (3, -6)$.

الحل

النقطة $(0, 3\sqrt{2})$ هي أحد الرأسين، إذن $a = 3\sqrt{2} \implies a^2 = 18$ (صادي). نعوض $(3, -6)$:

$$\frac{36}{18} - \frac{9}{b^2} = 1 \implies 2 - \frac{9}{b^2} = 1 \implies b^2 = 9 \implies \frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{9} = 1$$

مثال (4) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة.

الحل

رأسا الناقص $c^2 = 100 \implies c_{\text{زائد}} = 10 \implies (\pm 10, 0)$ (سيني)، و $a = 6 \implies a^2 = 36 \implies 2a = 12$:

$$b^2 = 100 - 36 = 64 \implies \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

مثال (5) جد معادلة القطع الزائد والناقص إذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما يقعان على محور السينات وطول المحور الكبير $6\sqrt{2}$ وطول المحور الحقيقي 6.

الحل

رأسا الناقص هما بؤرتا الزائد، وبؤرتا الناقص هما رأسا الزائد:

- **القطع الناقص:** $a = 3\sqrt{2} \implies a^2 = 18$، و $c = a_{\text{زائد}} = 3 \implies c^2 = 9 \implies b^2 = 18 - 9 = 9$.

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- **القطع الزائد:** $a = 3 \implies a^2 = 9$، و $c = a_{\text{ناقص}} = 3\sqrt{2} \implies c^2 = 18 \implies b^2 = 18 - 9 = 9$.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الثاني

س4 قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الأصل، أحدهما يمر ببؤرة الآخر، فإذا كانت $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة القطع الناقص، فجد:

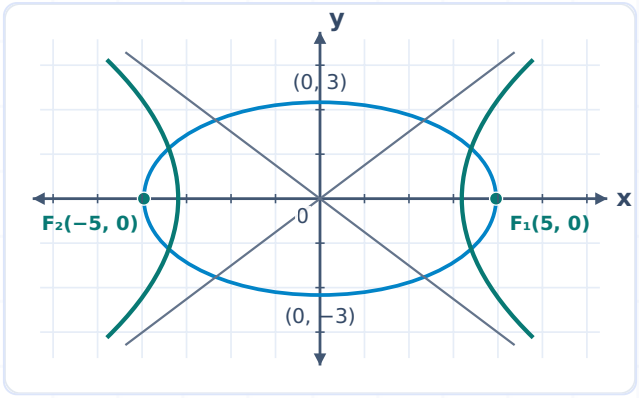
أ) مساحة القطع الناقص، ب) محيط القطع الناقص، ج) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه، د) الاختلاف المركزي لكل منهما.

الحل

بقسمة معادلة الناقص على 225: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \implies a = 5,\ b = 3,\ c = \sqrt{25 - 9} = 4$.

- **أ) مساحة القطع الناقص:** $A = ab\pi = (5)(3)\pi = 15\pi$ وحدة مربعة.
- **ب) محيط القطع الناقص بالتقريب:** $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}} = 2\pi\sqrt{17}$ وحدة.
- **ج) معادلة القطع الزائد:** بما أن كل قطع يمر ببؤرتي الآخر: بؤرتا الزائد $c = 5 \implies (\pm 5, 0)$ ، ورأساه $a = 4 \implies (\pm 4, 0)$:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \implies \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



البؤرتان F_1, F_2

- **د) الاختلاف المركزي:**
  - للقطع الناقص: $e = \frac{4}{5} < 1$.
  - للقطع الزائد: $e = \frac{5}{4} > 1$.

س5 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه بالتقريب 10π وحدة وفق الصيغة المذكورة.

الحل

$$A = ab\pi = 7\pi \implies b = \frac{7}{a} \quad \dots(1)$$

$$2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 10\pi \xrightarrow{\div 2\pi} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 5 \xrightarrow{\text{بالتربيع}} a^2+b^2 = 50 \quad \dots(2)$$

نعوض (1) في (2):

$$a^2 + \frac{49}{a^2} = 50 \implies a^4 - 50a^2 + 49 = 0 \implies (a^2-49)(a^2-1) = 0$$

- إما $a^2 = 49 \implies a = 7 \implies b = 1 \implies b^2 = 1$.
- أو $a^2 = 1 \implies a = 1 \implies b = 7$ (يهمل لأن $a > b$ في القطع الناقص).

إذن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$$



«يحتاج عالم الرياضيات إلى روح شاعر.»

صوفيا كوفاليفسكايا

كما نُقل عنها في أرشيف ماكتيوتر