2 القطوع المخروطية

نسخة بدون أجوبة

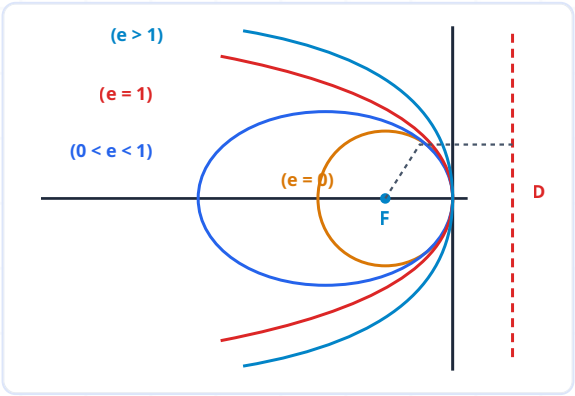


بداية الرحلة

من الرسم نقرأ الفكرة، وبالمعادلة نتحقّق منها.

مقدمة: القطع المخروطي

تعريف القطع المخروطي: ليكن (x_1, y_1) نقطة ثابتة في المستوي وليكن $ax + by + c = 0$ مستقيماً ثابتاً في المستوي نفسه، لذا فإن مجموعة كل النقاط التي نسبة بُعد كل منها عن النقطة (x_1, y_1) إلى بُعدها عن المستقيم $ax + by + c = 0$ تساوي عدداً ثابتاً (e) تكوّن شكلاً هندسياً يُسمى بالقطع المخروطي.



الدائرة $e = 0$ القطع الناقص $0 < e < 1$ القطع المكافئ $e = 1$ القطع الزائد $e > 1$ البؤرة F الدليل D

عناصر القطع المخروطي

1. **البؤرة:** $F(x_1, y_1)$
2. **معادلة الدليل:** $ax + by + c = 0$
3. **الاختلاف المركزي:** e هو نسبة بُعد النقطة عن البؤرة إلى بُعدها عن الدليل. وللقطع الناقص والزائد $e = \frac{c}{a}$، حيث c بُعد البؤرة عن المركز وa نصف المحور الرئيس. ويحدد e نوع القطع المخروطي:
   - $e = 0$: دائرة.
   - $0 < e < 1$: قطع ناقص.
   - $e = 1$: قطع مكافئ.
   - $e > 1$: قطع زائد.

4. **المسافة بين البؤرة والدليل (للقطع المكافئ):** $|2p|$.

المعادلة العامة للقطع المخروطي

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

ملاحظات أساسية

1. النقطة السينية (تقع على المحور السيني) إحداثيها الصادي يكون صفراً $(x,0)$.
2. النقطة الصادية (تقع على المحور الصادي) إحداثيها السيني يكون صفراً $(0,y)$.
3. كل مستقيم يوازي المحور السيني معادلته تكون ما يقطعه من المحور الصادي $(y=k)$.
4. كل مستقيم يوازي المحور الصادي معادلته تكون ما يقطعه من المحور السيني $(x=h)$.

أولاً: القطع المكافئ (Parabola)

تعريف القطع المكافئ: هو مجموعة النقط $M(x,y)$ في المستوي والتي يكون بُعدها عن نقطة ثابتة F تسمى **(البؤرة)** حيث $p\neq 0$، يساوي بُعدها عن مستقيم معلوم يسمى **(الدليل** $\overleftrightarrow{D}$**)** وهو لا يحتوي البؤرة.

حالات القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل $(0,0)$

الحالة الأولى: البؤرة تقع على محور السينات (axis-x) والرأس في نقطة الأصل

1- الفتحة نحو اليمين $(p>0)$

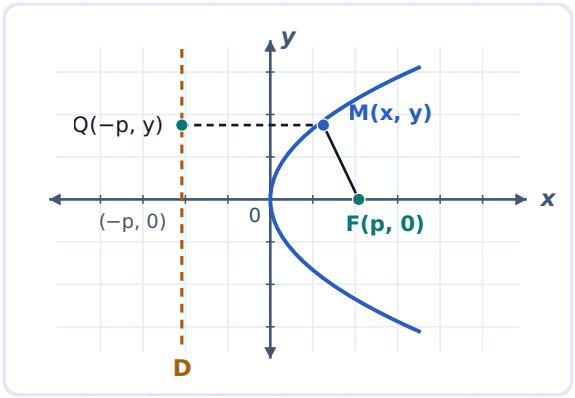
- من تعريف القطع المكافئ: $\frac{MF}{MQ}=e=1 \implies MF=MQ$.
- باستخدام قانون البعد $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ بين النقطة $M(x,y)$ والبؤرة $F(p,0)$ ونقطة الدليل $Q(-p,y)$:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2px+p^2 \implies y^2=4px \quad (\forall p>0)$$

- **معادلة القطع المكافئ:** $y^2=4px$
- **معادلة الدليل:** $x=-p$



F البؤرة M نقطة على المنحنى Q قدم العمود على الدليل D الدليل

2- الفتحة نحو اليسار ($p > 0$)

- **معادلة القطع المكافئ:** $y^2 = -4px$
- **معادلة الدليل:** $x = p$

الحالة الثانية: البؤرة تقع على محور الصادات (y-axis) والرأس في نقطة الأصل

(تكون هنا معادلة القطع دالة حقيقية)

1- الفتحة نحو الأعلى ($p > 0$)

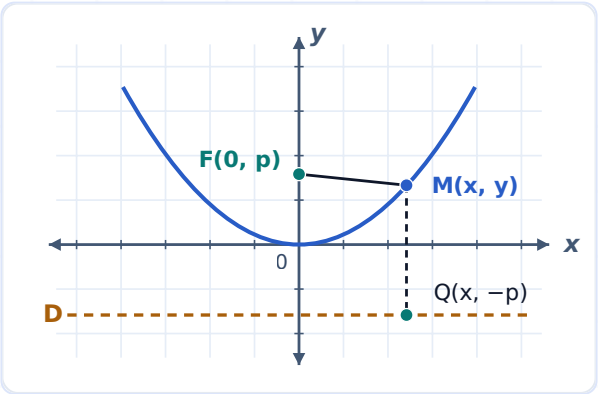
- من تعريف القطع المكافئ $MF = MQ$ حيث $F(0,p)$ و $Q(x,-p)$:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2 \implies x^2 = 4py \quad (\forall p > 0)$$

- **معادلة القطع المكافئ:** $x^2 = 4py$
- **معادلة الدليل:** $y = -p$



F البؤرة M نقطة على المنحنى Q قدم العمود على الدليل D الدليل

2- الفتحة نحو الأسفل ($p > 0$)

- **معادلة القطع المكافئ:** $x^2 = -4py$
- **معادلة الدليل:** $y = p$

مقارنة بين معادلتي القطع المكافئ (رأسه نقطة الأصل)

عندما يكون على محور السينات (axis-x)	عندما يكون على محور الصادات (axis-y)
1. البؤرة تنتمي لمحور السينات (axis-x)	1. البؤرة تنتمي لمحور الصادات (axis-y)
2. البؤرة $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x = -p$	2. البؤرة $F(0,p)$ ومعادلة الدليل $y = -p$
3. معادلة محور القطع هي $y = 0$	3. معادلة محور القطع هي $x = 0$
4. الدليل يوازي المحور الصادي	4. الدليل يوازي المحور السيني
5. التناظر حول محور السينات	5. التناظر حول محور الصادات
6. المحور السيني ينصف الدليل	6. المحور الصادي ينصف الدليل
القانون: $y^2 = 4px$	القانون: $x^2 = 4py$

ملاحظات عامة

1. إشارة البؤرة عكس إشارة الدليل والعكس صحيح.
2. المسافة بين البؤرة والدليل تساوي $2|p|$.
3. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ فهي تحقق معادلته (أي أن القطع المكافئ يمر بها).
4. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ بُعدها عن البؤرة يساوي بُعدها عن الدليل.
5. رأس القطع المكافئ هو نقطة الأصل ومعادلة المميز الخاصة به هي $b^2 - 4ac = 0$.

جدول يظهر جميع حالات القطع المكافئ (رأسه نقطة الأصل)

المعادلة	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه القطع	التناظر
$y^2 = 4px$	$F(p,0)$	$x = -p$	x	يمين	axis-x
$y^2 = -4px$	$F(-p,0)$	$x = p$	x	يسار	axis-x
$x^2 = 4py$	$F(0,p)$	$y = -p$	y	أعلى	axis-y
$x^2 = -4py$	$F(0,-p)$	$y = p$	y	أسفل	axis-y

مثال جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ في كل مما يأتي:

(a) $y^2 = -8x$

(b) $y^2 = 4x$

ملاحظات وأمثلة لإيجاد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل

أولاً وثانياً: إذا عُلمت البؤرة أو معادلة الدليل

- **أولاً:** إذا عُلمت بؤرة القطع المكافئ فإن الحل يكون بشكل مباشر؛ نستخرج قيمة p ونكتب المعادلة المناسبة ونعوض.
- **ثانياً:** إذا عُلمت معادلة الدليل فإن البؤرة ستكون على نفس المحور الذي يقطعه الدليل بالاتجاه الآخر، فنستخرج إحداثي البؤرة ثم قيمة p ونكتب المعادلة ونعوض.

مثال جد معادلة القطع المكافئ إذا علمت أن:

(أ) بؤرته هي $(3,0)$ ورأسه في نقطة الأصل.

(ب) معادلة الدليل $2x-6=0$ ورأسه في نقطة الأصل.

مثال جد معادلة القطع المكافئ إذا عُلم:

(أ) بؤرته $(0,5)$ ورأسه في نقطة الأصل.

(ب) معادلة الدليل $y=7$ ورأسه في نقطة الأصل.

ثالثاً: إذا مر القطع المكافئ بنقطة معينة

إذا مر القطع المكافئ بنقطة معينة فإنها تحقق معادلته؛ فإذا كانت البؤرة تنتمي لمحور السينات نكتب إحدى معادلتي محور السينات ونعوض لإيجاد p، وإذا كانت البؤرة تنتمي لمحور الصادات نكتب إحدى معادلتي محور الصادات ونعوض، وفي حالة لم يحدد موقع البؤرة نأخذ الاحتمالين معاً.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(2,4)$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور الصادات ويمر بالنقطة $(-1, -4)$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(-2, 6)$.

رابعاً: إذا مر القطع المكافئ بنقطتين تقعان في ربعين متجاورين

فإن البؤرة تقع على محور تناظر الربعين، فنكتب المعادلة المناسبة ونعوض أي نقطة من النقطتين لإيجاد p.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 4), (2, -4)$ ورأسه نقطة الأصل.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $\left(\sqrt{6}, -\frac{1}{2}\right), (-2\sqrt{3}, -1)$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(4, -1), (-4, -1)$ والرأس في نقطة الأصل.

خامساً: إذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة معينة (a, b)

إذا كانت البؤرة تقع على محور السينات فإن معادلة الدليل هي $x = a$، وإذا كانت على محور الصادات فإن معادلة الدليل هي $y = b$، وفي حالة عدم تحديد موقع البؤرة نأخذ الاحتمالين معاً.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(-2, 3)$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي لمحور الصادات ودليله يمر بالنقطة $(2, -4)$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليله بالنقطة $(3, -5)$.

سادساً: إذا مر الدليل بنقطتين مختلفتين

فإن معادلة الدليل هي المسقط المتساوي من النقطتين ($x = \ldots$ أو $y = \ldots$).

مثال جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية:

1. دليله يمر بالنقطتين $(-3, 1), (-3, 9)$ ورأسه نقطة الأصل:

2. دليله يمر بالنقطتين $(-4, 2), (-7, 2)$ ورأسه نقطة الأصل:

سابعاً: إذا مر الدليل بنقطة تقع على أحد المحورين الإحداثيين

فإن البؤرة تقع على نفس المحور بالاتجاه الآخر.

مثال جد معادلة القطع المكافئ في الحالات الآتية:

1. دليله يمر بالنقطة $(-4, 0)$ ورأسه نقطة الأصل:

2. دليله يمر بنقطة تقاطع $2x + 3y = 12$ مع محور الصادات ورأسه نقطة الأصل:

أمثلة منوعة على القطع المكافئ

مثال (باستخدام التعريف) باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ إذا عُلم أن بؤرته $(\sqrt{3}, 0)$ ورأسه في نقطة الأصل.

مثال جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $3x^2 - 24y = 0$.

مثال جد البؤرة والدليل للقطع المكافئ $3y^2 = 16x - y^2$.

مثال إذا كانت $x^2 - 2ky = 0$ تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته $(0, 1)$ فجد قيمة k.

مثال جد قيمة a من معادلة القطع المكافئ $\frac{1}{4}y^2 = ax$ رأسه نقطة الأصل ويمر دليله بالنقطة $(-6, 3)$.

ملاحظات:

1. إذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_1, -y_1)$ فالبؤرة سينية.
2. إذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين $(x_1, y_1), (-x_1, y_1)$ فالبؤرة صادية.

واجبات H.W

[1] إذا كانت $y^2 - 4kx = 0$ تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته $(2, 0)$ فجد قيمة k.

[2] جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 1), (2, -1)$ والرأس في نقطة الأصل.

انسحاب المحاور للقطع المكافئ

نرمز إلى رأس القطع المكافئ المنسحب بـ $V(h,k)$، ويلخص الجدول الآتي جميع الحالات:

فتحة القطع	المحور الموازي	البؤرة	معادلة الدليل	معادلة المحور	معادلة القطع
يمين	x	$\overline{F}(p+h,k)$	$x=-p+h$	$y=k$	$(y-k)^2=4p(x-h)$
يسار	x	$\overline{F}(-p+h,k)$	$x=p+h$	$y=k$	$(y-k)^2=-4p(x-h)$
أعلى	y	$\overline{F}(h,p+k)$	$y=-p+k$	$x=h$	$(x-h)^2=4p(y-k)$
أسفل	y	$\overline{F}(h,-p+k)$	$y=p+k$	$x=h$	$(x-h)^2=-4p(y-k)$

مقارنة بين محوري الانسحاب للقطع المكافئ

عندما يوازي محور السينات (axis-x)	عندما يوازي محور الصادات (axis-y)
1. البؤرة $\overline{F}(p+h,k)$ ومعادلة الدليل $x=-p+h$	1. البؤرة $\overline{F}(h,p+k)$ ومعادلة الدليل $y=-p+k$
2. الدليل يوازي المحور الصادي	2. الدليل يوازي المحور السيني
3. الرأس والبؤرة على مستقيم يوازي المحور السيني	3. الرأس والبؤرة على مستقيم يوازي المحور الصادي
4. الرأس $V(h,k)$	4. الرأس $V(h,k)$
5. القانون: $(y-k)^2=4p(x-h)$	5. القانون: $(x-h)^2=4p(y-k)$
6. معادلة المحور: $y=k$	6. معادلة المحور: $x=h$

ملاحظة: الرأس هو منتصف البعد بين البؤرة والدليل: $x_{\text{الرأس}}=\frac{x_{\text{البؤرة}}+x_{\text{الدليل}}}{2}$ ، وكذلك $y_{\text{الرأس}}=\frac{y_{\text{البؤرة}}+y_{\text{الدليل}}}{2}$.



«كتاب الكون مكتوب بلغة الرياضيات، وحروفه مثلثات ودوائر وأشكال هندسية أخرى.»

غاليليو غاليلي
الفاحص، ١٦٢٣

مثال عيّن الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل للقطع المكافئ: $(y+1)^2 = 4(x-2)$.

ملاحظة (إكمال المربع): في بعض الحالات نحتاج إلى التحويل لصيغة المربع الكامل لجعل المقارنة ممكنة؛ فإذا كانت المعادلة بالصورة $x^2 + bx = c$ نضيف للطرفين مربع نصف معامل x أي $\left(\frac{b}{2}\right)^2$، ولا يصح هذا إلا إذا كان معامل $x^2 = 1$.

مثال ناقش القطع المكافئ: $x^2 + 4x + 2y - 2 = 0$.

مثال جد إحداثي الرأس والبؤرة ومعادلة محور القطع ومعادلة الدليل للقطع المكافئ: $3y^2 - 24y = 12x$.

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-1, 3)$ ويمر بالنقطة $(3, 5)$ ومحوره يوازي محور السينات.

مثال **جد إحداثي الرأس والبؤرة ومعادلة محور القطع ومعادلة الدليل للقطع المكافئ:** $y^2 + 8y - 8x + 24 = 0$.

ملاحظة: يمكننا استنتاج معادلة المحور مباشرة من الجزء الذي فيه تربيع في المعادلة، كما في الأمثلة الآتية:

- $(y-5)^2 = 6(x-2) \implies y = 5$
- $(x+2)^2 = 3(y-1) \implies x = -2$
- $x^2 = 12y \implies x = 0$
- $y^2 = -4x \implies y = 0$

تمارين (2 - 1)

س1 جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها:

(أ) البؤرة $(5, 0)$ والرأس نقطة الأصل

(ب) البؤرة $(0, -4)$ والرأس نقطة الأصل

متابعة السؤال

س1 جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها:

(ج) البؤرة $(0, \sqrt{2})$ والرأس نقطة الأصل

(د) معادلة دليل القطع المكافئ $4y + 3 = 0$ والرأس في نقطة الأصل

س2 في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ:

1. $x^2 = 4y$

متابعة السؤال

س2 في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ:

2. $2x + 16y^2 = 0$

3. $y^2 = -4(x - 2)$

4. $(x - 1)^2 = 8(y - 1)$

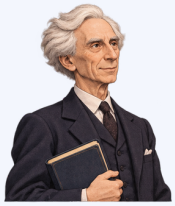
5. $y^2 + 4y + 2x = -6$

6. $x^2 + 6x - y = 0$

س3 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 5), (2, -5)$ والرأس في نقطة الأصل.

س4 إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3, 4)$ والرأس في نقطة الأصل، جد معادلة القطع المكافئ علماً أن بؤرته تنتمي لأحد المحورين.

س5 قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر بالنقطة $(1, 2)$، جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله ثم ارسم القطع.



«الرياضيات، حين ننظر إليها حقّ النظر، فيها جمالٌ سامٍ.»

برتراند راسل
دراسة الرياضيات

س6 باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ:

1- البؤرة $(7,0)$ والرأس في نقطة الأصل

2- معادلة الدليل $y=\sqrt{3}$ والرأس في نقطة الأصل

أمثلة إضافية (القطع المكافئ)

مثال (1) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(11,-10),(-13,-10)$ والذي رأسه $(-1,2)$.

مثال (2) النقط $(0,0),(4,-6),(-12,-6)$ تنتمي للقطع المكافئ $y=ax^2+bx+c$، جد إحداثي البؤرة ومعادلة الدليل والرأس والبعد البؤري (طول الوتر البؤري).

مثال (3) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية:

1. بؤرته $(5,0)$:

2. بؤرته $(0,3)$:

متابعة السؤال

مثال (3) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية:

3. معادلة دليله $2y - 6 = 0$:

4. بؤرته تنتمي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$:

5. يمر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{5})$، جد معادلته ومعادلة دليله:

6. بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(2, -4)$:

7. رأسه نقطة الأصل وبؤرته مركز الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$:

8. دليله يوازي المحور الصادي ومعادلة محوره $y = 0$ ويمر بالنقطة $(-2, 1)$:

9. يقطع من المستقيم $x = 4$ قطعة طولها 10 وحدات:

مثال (4) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية:

1. بؤرته الصيغة الديكارتية للعدد $z = \frac{-4+2i}{2-i}$:

2. بؤرته تنتمي لأحد المحورين ودليله يمر بالنقطة $(3, 4)$:

3. يمر برؤوس المثلث ABC حيث $A(0,0), B(-2,4), C(2,m)$، ثم أوجد قيمة m:

4. رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $2y + \sqrt{3} = 0$:



«الرياضيات موسيقى العقل.»

جيمس جوزيف سيلفستر

خطابه أمام الجمعية البريطانية لتقدّم العلوم، ١٨٦٩

واجبات (القطع المكافئ) H.W

[1] في كل مما يأتي جد البؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ:

1. $y^2 = -8(x-2)$
2. $x^2 + 4x - y = 0$
3. $x^2 + 28y = 0$

---

[2] إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(2,5)$ والرأس في نقطة الأصل فجد معادلته علماً أن بؤرته تنتمي لأحد المحورين.

---

[3] في كل مما يأتي جد معادلة القطع المكافئ الذي:

1. بؤرته $(\ldots)$ (مطموسة في الأصل) والرأس في نقطة الأصل.
2. معادلة الدليل له $2x - 3 = 0$ والرأس في نقطة الأصل.
3. بؤرته تنتمي لمحور السينات ويمر بالنقطة $(3,6)$ والرأس في نقطة الأصل.
4. بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(4,5)$ والرأس في نقطة الأصل.
5. معادلة الدليل له $2y + \sqrt{3} = 0$ والرأس في نقطة الأصل.

---

[4] إذا كانت النقطة $(2,4)$ تنتمي للقطع المكافئ $y^2 = (a+4)x$ فجد قيمة a ثم جد إحداثي البؤرة ومعادلة الدليل.

---

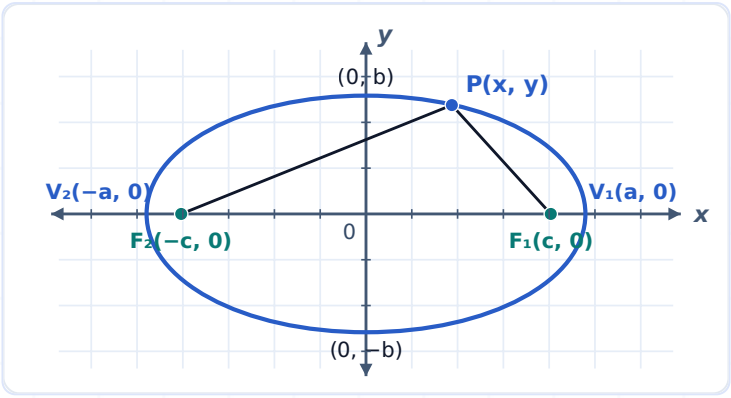
[5] باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي:

1. بؤرته $(4,0)$ والرأس في نقطة الأصل.
2. معادلة الدليل $y - 5 = 0$ والرأس في نقطة الأصل.

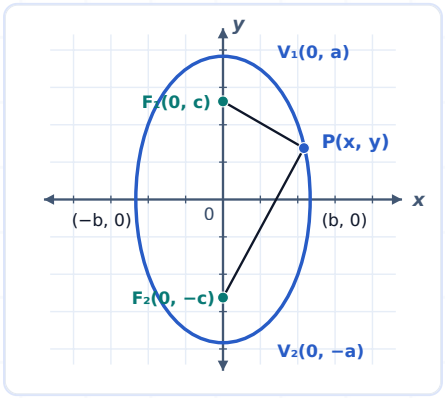
ثانياً: القطع الناقص (Ellipse)

تعريف القطع الناقص: هو مجموعة من النقط $P(x,y)$ في المستوي التي يكون مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان **(البؤرتان)** يساوي عدداً ثابتاً هو $(2a)$، أي:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$



طول المحور الكبير يساوي $2a$ طول المحور الصغير يساوي $2b$ البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2 نقطة على المنحنى P



البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2 نقطة على المنحنى P

مفردات القطع الناقص (مركزه نقطة الأصل)

الموقع	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة القياسية
البؤرتان على محور السينات	$F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$	$V_1(a,0),\ V_2(-a,0)$	$(0,b),\ (0,-b)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
البؤرتان على محور الصادات	$F_1(0,c),\ F_2(0,-c)$	$V_1(0,a),\ V_2(0,-a)$	$(b,0),\ (-b,0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

خواص القطع الناقص

1. دائماً $a > b$ و $a > c$ حيث $a, b, c > 0$.
2. العلاقة الأساسية: $c^2 = a^2 - b^2 \implies a^2 = b^2 + c^2$.

3. طول المحور الكبير يساوي $2a$ (العدد الثابت).
4. طول المحور الصغير يساوي $2b$.
5. المسافة بين البؤرتين تساوي $2c$ (البعد البؤري).
6. مساحة القطع الناقص: $A = ab\pi$ وحدة مربعة.
7. محيط القطع الناقص بالتقريب: $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
8. الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$، أي $(0 < e < 1)$.
9. النسبة بين طولي محوريه: $\frac{2a}{2b}$ أو $\frac{2b}{2a}$.
10. إذا مر القطع بنقطة أحد إحداثياتها صفر فالإحداثي الثاني هو إما a أو b والأكبر هو a والأصغر هو b.

ملاحظات هامة

1. إذا كان مقام x^2 أكبر فالبؤرتان سينيتان وتكون المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. إذا كان مقام y^2 أكبر فالبؤرتان صاديتان وتكون المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
3. الطرف الأيمن في معادلة القطع الناقص دائماً يساوي 1.
4. كل نقطة تنتمي إلى القطع الناقص تحقق معادلته.

أمثلة على القطع الناقص

مثال (باستخدام التعريف) باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2,0), F_2(-2,0)$ والعدد الثابت (6).

مثال في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين وإحداثيات كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي:

(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2) $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0), F_2(-3,0)$ ورأساه $V_1(5,0), V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الأصل.

مثال جد طول كل من المحورين وإحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي والمحيط والمساحة لمعادلة القطع الناقص $16x^2 + 25y^2 = 400$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويقطع من محور السينات (8) وحدات ومن الصادات (12) وحدة، ثم جد المسافة بين بؤرتيه ومساحة منطقته ومحيطه واختلافه المركزي.

ملاحظة: نقاط تقاطع القطع مع المحورين تمثل الرؤوس والأقطاب، والأبعد عن المركز هو الرأس.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(4,0),(0,3)$ ثم جد مساحته ومحيطه.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(4,0)$ واختلافه المركزي $\frac{1}{2}$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0,-3)$ والنسبة بين طولي محوريه $\frac{4}{5}$.

مثال لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ ، جد قيمة k.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات، والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 20x$، والنسبة بين طول محوره الصغير والبعد بين البؤرتين $\frac{4}{3}$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(0,4)$ ومجموع مربعي طولي محوريه 136.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات وإحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالعددين $3, 7$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان إلى محور السينات ويمر بالنقطتين $(2,2), \left(3, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ ويمر بالنقطة $(3,0)$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرته بؤرة القطع المكافئ $2y^2 - 16x = 0$ ويمر بالنقطة $(0, -5)$.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمار ببؤرة القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$ والبعد بين بؤرتيه يساوي 6 وحدة طول.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع المحورين الإحداثيين.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور السينات حيث مساحة المنطقة لهذا القطع 24π.

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = -24y$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$.

ملاحظات لرسم القطع الناقص

1. نعين الرأسين $V_1(a,0), V_2(-a,0)$.
2. نعين القطبين $M_1(0,b), M_2(0,-b)$.
3. نصل بين النقاط الأربع V_1, M_1, V_2, M_2 بالترتيب لتكوين منحني متصل.
4. نعين البؤرتين $F_1(c,0), F_2(-c,0)$.

انسحاب المحاور للقطع الناقص

نرمز إلى مركز القطع الناقص المنسحب بـ (h,k)، ويلخص الجدول الآتي الحالتين:

الحالة	المركز	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة القياسية
المحور الكبير يوازي x	(h,k)	$\overline{F_1}(c+h,k)$ $\overline{F_2}(-c+h,k)$	$\overline{V_1}(a+h,k)$ $\overline{V_2}(-a+h,k)$	$(h,b+k)$ $(h,-b+k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
المحور الكبير يوازي y	(h,k)	$\overline{F_1}(h,c+k)$ $\overline{F_2}(h,-c+k)$	$\overline{V_1}(h,a+k)$ $\overline{V_2}(h,-a+k)$	$(b+h,k)$ $(-b+h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

ملاحظة: معادلة المحور الكبير تُؤخذ من البسط الذي مقامه أصغر، ومعادلة المحور الصغير تُؤخذ من البسط الذي مقامه أكبر. فمثلاً في المعادلة $\frac{(x-4)^2}{100} + \frac{(y+7)^2}{64} = 1$: معادلة المحور الكبير $y = -7$، ومعادلة المحور الصغير $x = 4$.

مثال جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص:

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

مثال جد البؤرتين والرأسين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص:

$$4x^2+9y^2-8x+36y=-4$$

مراجعة عامة للقطع الناقص

1. نرتب الحدودية، نجعل معامل x^2 و y^2 يساوي 1 (بعد إخراج العامل المشترك عند إكمال المربع)، ونجعل الطرف الأيمن يساوي 1، ثم نقارن بالمعادلة القياسية.
2. مجموع طولي المحورين يساوي $2a+2b$، والفرق بينهما يساوي $2a-2b$.
3. النسبة بين طولي المحورين: إذا كان البسط أكبر من المقام فهي $\frac{2a}{2b}$، وإذا كان البسط أصغر من المقام فهي $\frac{2b}{2a}$.

تمارين (2 - 2)

س1 عيّن كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة الآتية:

(1) $x^2 + 2y^2 = 1$

(2) $9x^2 + 13y^2 = 117$

(3) $\frac{(x-4)^2}{81} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

(4) $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

متابعة السؤال

س1 عيّن كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة الآتية:

(5) $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$

س2 جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل في كل مما يأتي:

1. البؤرتان $(5,0), (-5,0)$ وطول محوره الكبير 12 وحدة:

2. البؤرتان $(0, \pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$:

متابعة السؤال

س2 جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل في كل مما يأتي:

3. إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $1,5$ وحدة على الترتيب:

4. اختلافه المركزي $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير 12 وحدة:

5. المسافة بين بؤرتيه 8 وحدات ونصف محوره الصغير 3 وحدات:

س3 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص إذا عُلم:

1- بؤرتاه $(0, \pm 2)$ ورأساه $(0, \pm 3)$ ومركزه نقطة الأصل

2- المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

س4 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ ويمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

س5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6, 2), (3, 4)$.

س6 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = 12x$.

س7 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند $x = -2$.

س8 قطع ناقص $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه 60 وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{3}x$، ما قيمة كل من h, k؟

س9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

س10 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(4,0), F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي له بحيث محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة.

أمثلة إضافية (القطع الناقص)

مثال (1) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومساحته 24π والنسبة بين طولي محوريه $\frac{3}{8}$.

مثال (2) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوراه ينطبقان على المحورين وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 12y = 0$ وطول محوره الكبير ضعف الصغير.

مثال (3) جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة $(0, 3)$ والمسافة بين بؤرتيه 6 وحدات.

مثال (4) لتكن $Mx^2 + Ny^2 = 400$ معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(3, 0)$ والنسبة بين طول محوره الصغير إلى محوره الكبير $\frac{4}{5}$، جد قيمتي $M, N \in \mathbb{R}$.

مثال (5) جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته 80π والبعد بين بؤرتيه مساوياً للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ ودليله.

مثال (6) إذا كانت $\frac{y^2}{3M-2} - x = 0$ معادلة قطع مكافئ دليله يمر بالنقطة $(-1, 2)$، جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0, M)$ ومربع النسبة بين طولي محوريه $\frac{3}{4}$.

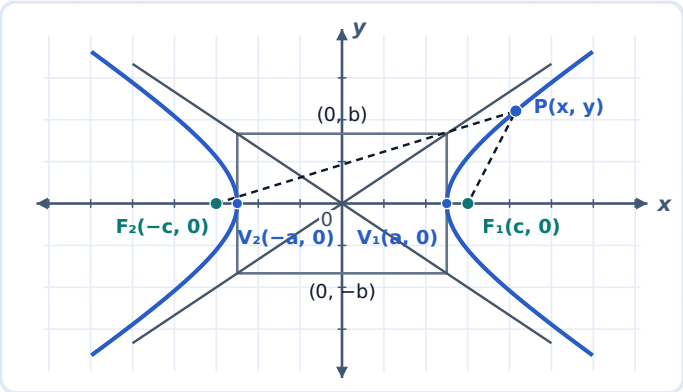
مثال (7) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $F_1(-\sqrt{6}, 0), F_2(\sqrt{6}, 0)$ ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x + 2y - 11 = 0$.

مثال (8) جد إحداثي البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين ومقدار الاختلاف المركزي ومعادلة القطع الناقص الذي مركزه $(1, -4)$ ومحوره الكبير يوازي محور الصادات وإحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالبعدين $10, 2$ وحدة طول.

ثالثاً: القطع الزائد (Hyperbola)

تعريف القطع الزائد: هي مجموعة النقط $P(x, y)$ في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بُعدي أي منها عن نقطتين ثابتتين **(البؤرتان)** يساوي عدداً ثابتاً $(2a)$، أي:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$



طول المحور الحقيقي يساوي $2a$ طول المحور المرافق يساوي $2b$ البعد البؤري يساوي $2c$ البؤرتان F_1, F_2 الرأسان V_1, V_2
P نقطة على المنحنى

مفردات القطع الزائد (مركزه نقطة الأصل)

الموقع	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة القياسية
البؤرتان على محور السينات	$F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$	$V_1(a,0),\ V_2(-a,0)$	$(0,b),\ (0,-b)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
البؤرتان على محور الصادات	$F_1(0,c),\ F_2(0,-c)$	$V_1(0,a),\ V_2(0,-a)$	$(b,0),\ (-b,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

ملاحظات هامة

1. دائماً $c > a$ و $c > b$ حيث $a, b, c > 0$.
2. طول المحور الحقيقي يساوي $2a$ (العدد الثابت).
3. طول المحور التخيلي (المرافق) يساوي $2b$.
4. المسافة بين البؤرتين تساوي $2c$ (البعد البؤري).
5. الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} > 1$.
6. العلاقة الأساسية: $c^2 = a^2 + b^2$.
7. في المعادلة القياسية، إذا كان معامل x^2 موجبًا فبؤرتا القطع الزائد سينيتان، وإذا كان معامل y^2 موجبًا فهما صاديتان.
8. إذا مر القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل بنقطة على أحد المحورين الإحداثيين، فتلك النقطة أحد رأسيه.

أمثلة على القطع الزائد

مثال عيّن البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه $F_1(0, \sqrt{8}), F_2(0, -\sqrt{8})$.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي (2) والمسافة بين بؤرتيه (12) وبؤرتاه على محور الصادات.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $(10, 0)$ والفرق بين طول محوره الحقيقي والتخيلي يساوي 4.

مثال جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(0,-6)$ وأحد رأسيه $(0,4)$.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2-32x=0$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه إلى طول محوره المرافق $\frac{5}{3}$.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ويمر بالنقطتين $(4\sqrt{2},3),\left(-5,\frac{9}{4}\right)$.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(3,0)$ والبعد بين بؤرتيه 10 وحدات.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2=-40x$ والذي يمس دليل القطع المكافئ $y^2+16x=0$.

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $(0, -2\sqrt{5})$ وطول محوره الحقيقي (8) وحدات.

انسحاب المحاور للقطع الزائد

نرمز إلى مركز القطع الزائد المنسحب بـ (h, k)، ويلخص الجدول الآتي الحالتين:

الحالة	المركز	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة القياسية
المحور الحقيقي يوازي x	(h, k)	 $\overline{F_1}(c+h, k)$ $\overline{F_2}(-c+h, k)$	 $\overline{V_1}(a+h, k)$ $\overline{V_2}(-a+h, k)$	 $(h, b+k)$ $(h, -b+k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
المحور الحقيقي يوازي y	(h, k)	 $\overline{F_1}(h, c+k)$ $\overline{F_2}(h, -c+k)$	 $\overline{V_1}(h, a+k)$ $\overline{V_2}(h, -a+k)$	 $(b+h, k)$ $(-b+h, k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

مثال **جد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي وطول المحورين للقطع الزائد:**

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

مثال **جد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي للقطع الزائد:** $4x^2 - 9y^2 - 16x - 54y = 101$.

تمارين (2 - 3)

س1 عيّن كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الآتية:

(a) $12x^2 - 4y^2 = 48$

(b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

© $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8$

(d) $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

س2 اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الآتية ثم ارسم القطع:

(أ) البؤرتان $(\pm 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$ ومركزه نقطة الأصل

(ب) طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدات وينطبق محوراه على المحورين ومركزه نقطة الأصل

متابعة السؤال

س2 اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الآتية ثم ارسم القطع:

(ج) مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ واختلافه المركزي (3)

س3 جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ والقيمة المطلقة للفرق بين بُعدي أية نقطة منه عن بؤرتيه تساوي (4).

س4 قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, -2\sqrt{5}), (1, 2\sqrt{5})$، جد معادلتي القطعين.

س5 قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $9x^2 + 16y^2 = 576$، جد قيمتي $h, k \in \mathbb{R}$.

س6 اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين $1, 9$ وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين.

س7 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل.

س8 النقطة $P(6, L)$ تنتمي إلى القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$، جد كلاً من: أ) قيمة L، ب) طول نصف القطر البؤري المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P.

س9 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$.

أمثلة إضافية (القطع الزائد والربط بين القطوع)

مثال (1) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره الحقيقي 16 والنسبة بين المسافة بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي $\frac{5}{4}$.

مثال (2) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2=20y$ وطول محوره المرافق يساوي البعد بين بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

مثال (3) جد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطتين $(0,3\sqrt{2}),(3,-6)$.

مثال (4) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة.

مثال (5) جد معادلة القطع الزائد والناقص إذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما يقعان على محور السينات وطول المحور الكبير $6\sqrt{2}$ وطول المحور الحقيقي 6.

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الثاني

س4 قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الأصل، أحدهما يمر ببؤرة الآخر، فإذا كانت $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة القطع الناقص، فجد:

أ) مساحة القطع الناقص، ب) محيط القطع الناقص، ج) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه، د) الاختلاف المركزي لكل منهما.

س5 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه بالتقريب 10π وحدة وفق الصيغة المذكورة.

«يحتاج عالم الرياضيات إلى روح شاعر.»

صوفيا كوفاليفسكايا

كما نُقل عنها في أرشيف ماكتيوتر

