وزاريات المعادلات التفاضلية

20 درجة في الوزاري · الأسئلة والأجوبة

1. الأسئلة الوزارية حول (برهن أن / هل أن / أثبت أن) حل للمعادلة التفاضلية

السؤال 1: هل أن $y = x^3 - x - 2$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$ ؟

د 1 2011 | تمهيدي 2014 | د 3 2016 | د 1 خارج القطر 2017 | د 2 2018 | د 2 تطبيقي 2021 | د 1 أحيائي 2023 | د 3 2024 | د 3 محاولات 2024

الحل

$$y = x^3 - x - 2 \implies \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1 \implies \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

$$\text{LHS} = \frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 6x - 6x = 0 = \text{RHS}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 2: بين أن $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$.

د 1 خارج القطر 2011 | د 2 2011 | د 4 أسئلة النازحين 2015

الحل

$$y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x}, \qquad y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$\text{LHS} = y'' + y' - 6y = (4e^{2x} + 9e^{-3x}) + (2e^{2x} - 3e^{-3x}) - 6(e^{2x} + e^{-3x}) = 0 = \text{RHS}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 3: برهن أن $y = ae^{-x}$ حيث $a \in \mathbb{R}$ هو حل للمعادلة $y' + y = 0$.

تمهيدي 2012 | د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل

$$y = ae^{-x} \implies y' = -ae^{-x}$$

$$\text{LHS} = y' + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = \text{RHS}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 4: بين أن $\ln|y| = x^2 + c$، $c \in \mathbb{R}$ هو حلاً للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$.

د 1 2012 | تمهيدي 2015 | د 2 خارج القطر 2016 | د 1 2017 | تمهيدي 2019 | د 1 خارج القطر تطبيقي 2019 | تمهيدي أحيائي 2023 | تمهيدي 2024

الحل

نشتق الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ x:

$$\ln|y| = x^2 + c \implies \frac{y'}{y} = 2x \implies y' = 2xy$$

نشتق مرة ثانية:

$$y'' = 2xy' + 2y = 2x(2xy) + 2y = 4x^2y + 2y$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 5: برهن أن $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$.

د 1 خارج القطر 2012 | د 1 2013 | تمهيدي 2025

الحل

$$y = \sin x \implies y' = \cos x \implies y'' = -\sin x$$

$$\text{LHS} = y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 = \text{RHS}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 6: برهن أن $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.

د 1 خارج القطر 2013 | د 1 2015 | تمهيدي تطبيقي 2017 | تمهيدي تطبيقي 2021 | د 1 2024

د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x, \qquad y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x$$

$$\text{LHS} = y'' + 4y = (-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x) = 0 = \text{RHS}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 7: بين أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$.

د 3 2013 | د 1 2014

الحل

$$y = x^2 + 3x \implies y' = 2x + 3$$

$$\text{LHS} = xy' = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$$

$$\text{RHS} = x^2 + y = x^2 + (x^2 + 3x) = 2x^2 + 3x$$

بما أن LHS = RHS فإن العلاقة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 8: برهن أن $y = \cos x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$.

د 1 أسئلة النازحين 2014 | د 1 2015

الحل

$$y = \cos x \implies y' = -\sin x \implies y'' = -\cos x$$

$$\text{LHS} = y'' + y = -\cos x + \cos x = 0 = \text{RHS}$$

إذن العلاقة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 9: بين أن $\ln y^2 = x + a$، $a \in \mathbb{R}$ حلاً للمعادلة $2y' - y = 0$.

د 2 2014 | د 3 أحيائي 2023 | د 3 تطبيقي 2023

الحل

$$\ln y^2 = x + a \implies 2\ln|y| = x + a$$

نشتق ضمنياً:

$$2 \cdot \frac{y'}{y} = 1 \implies 2y' = y \implies 2y' - y = 0$$

إذن العلاقة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 10: أثبت أن $y = x\ln x$ أحد حلول المعادلة $x\dfrac{dy}{dx} = x + y$، $x > 0$.

د 3 2014 | د 2 أحيائي 2021

الحل

$$y = x\ln x \implies \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x$$

$$\text{LHS} = x\frac{dy}{dx} = x(1 + \ln x) = x + x\ln x, \qquad \text{RHS} = x + y = x + x\ln x$$

بما أن LHS = RHS فإن $y = x\ln x$ أحد حلول المعادلة التفاضلية.

السؤال 11: هل أن $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حل للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 3$؟

د 1 أسئلة النازحين 2015 | د 2 أحيائي 2023

الحل

نشتق $y^2 = 3x^2 + x^3$ مرتين ضمنياً:

$$2yy' = 6x + 3x^2$$

$$2yy'' + 2(y')^2 = 6 + 6x \xrightarrow{\div 2} yy'' + (y')^2 = 3 + 3x \implies yy'' + (y')^2 - 3x = 3$$

نعم، العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 12: أثبت أن $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلاً للمعادلة $y^3y'' = -2$.

د 1 خارج القطر 2015 | د 2 2016 | د 1 2018 | د 1 أحيائي 2022 | د 1 2025

الحل

نشتق $2x^2 + y^2 = 1$ ضمنياً:

$$4x + 2yy' = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x + yy' = 0 \implies y' = -\frac{2x}{y}$$

نشتق مرة ثانية:

$$2 + yy'' + (y')^2 = 0 \implies 2 + yy'' + \frac{4x^2}{y^2} = 0 \xrightarrow{\times y^2} 2y^2 + y^3y'' + 4x^2 = 0$$

$$y^3y'' = -2(2x^2 + y^2) = -2(1) = -2$$

إذن العلاقة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 13: بين رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' + 25yx = 0$ ثم بين هل أن $yx = \sin 5x$ حلاً لها؟

د 2 خارج القطر 2015 | د 1 خارج القطر 2016 | تمهيدي 2017 | تمهيدي 2018 | د 1 2019 | د 2 2024 | د 2 2025

الحل

- **الرتبة والدرجة:** المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الأولى.
- **التحقق من الحل:** نشتق $yx = \sin 5x$ مرتين ضمنياً:

$$xy' + y = 5\cos 5x$$

$$xy'' + y' + y' = -25\sin 5x \implies xy'' + 2y' + 25\sin 5x = 0$$

وبالتعويض عن $\sin 5x = yx$:

$$xy'' + 2y' + 25yx = 0$$

نعم، العلاقة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 14: أثبت أن $y = x\ln|x| - x$ أحد حلول المعادلة التفاضلية $x\dfrac{dy}{dx} = x + y$، $x > 0$.

تمهيدي 2016 | تمهيدي تطبيقي 2023 | د 1 تطبيقي 2023

الحل

$$y = x\ln|x| - x \implies \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln|x| - 1 = \ln|x|$$

$$\text{LHS} = x\frac{dy}{dx} = x\ln|x|, \qquad \text{RHS} = x + y = x + x\ln|x| - x = x\ln|x|$$

بما أن LHS = RHS فهي أحد حلول المعادلة التفاضلية.

السؤال 15: هل $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y^3y'' = -2$؟ بين ذلك.

د 3 خارج القطر 2016 | د 3 2018 | د 2 أحيائي 2022

الحل

بتربيع الطرفين نحصل على $2x^2 + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - 2x^2$. نشتق العلاقة ضمنياً مرتين:

$$4x + 2yy' = 0 \implies y' = -\frac{2x}{y}$$

$$2 + yy'' + (y')^2 = 0 \implies 2 + yy'' + \frac{4x^2}{y^2} = 0 \implies y^3y'' = -2(2x^2 + y^2) = -2$$

نعم، تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 16: هل أن $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حل للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$؟

د 2 2017

الحل

من $y^2 = 3x^2 + x^3$ نشتق ضمنياً مرتين:

$$2yy' = 6x + 3x^2 \implies 2yy'' + 2(y')^2 = 6 + 6x$$

$$yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$$

إذن العلاقة لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 17: هل يمثل $y = x^3 + x - 2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$؟

د 2 خارج القطر 2017

الحل

$$y = x^3 + x - 2 \implies \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \implies \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

نعم، تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 18: هل أن $y = x + 2$ حلاً للمعادلة $y'' + 3y' + y = 5$؟

د 3 أسئلة الموصل 2017

الحل

$$y = x + 2 \implies y' = 1 \implies y'' = 0$$

$$\text{LHS} = y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + (x + 2) = x + 5 \neq 5 = \text{RHS}$$

إذن العلاقة ليست حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 19: بين أن $2x^2 - y^2 = 1$ هو حل للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 = 2$.

د 3 2017 د 2 تطبيقي 2023

الحل

نشتق $2x^2 - y^2 = 1$ مرتين ضمنياً:

$$4x - 2yy' = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x - yy' = 0$$

$$2 - \left[yy'' + (y')^2\right] = 0 \implies yy'' + (y')^2 = 2$$

إذن العلاقة هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 20: هل أن العلاقة $y^2 = 3x^2 + x^3$ حلاً للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 8$؟

تمهيدي تطبيقي 2019

الحل

من $y^2 = 3x^2 + x^3$ نشتق ضمنياً مرتين:

$$2yy' = 6x + 3x^2 \implies 2yy'' + 2(y')^2 = 6 + 6x$$

$$yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 8$$

إذن العلاقة لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 21: إذا كانت $y = x \sin x$ فبرهن أن $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$.

د 1 خارج القطر 2019

الحل

$$y = x \sin x$$

$$y' = x \cos x + \sin x$$

$$y'' = -x \sin x + 2 \cos x$$

$$y''' = -x \cos x - 3 \sin x$$

$$y^{(4)} = x \sin x - 4 \cos x = y - 4 \cos x \implies y^{(4)} - y + 4 \cos x = 0$$

وهو المطلوب.

السؤال 22: هل يمثل $y = \tan x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $2yy' - y'' = 0$؟ بين ذلك.

د 1 خارج القطر تطبيقي 2019

الحل

$$y = \tan x \implies y' = \sec^2 x \implies y'' = 2 \sec^2 x \tan x$$

$$\text{LHS} = 2yy' - y'' = 2 \tan x \sec^2 x - 2 \sec^2 x \tan x = 0 = \text{RHS}$$

نعم، $y = \tan x$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 23: هل أن $yx = \sin 5x$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' + 25yx = 8$؟ بين ذلك.

2019 د 2

الحل

من $yx = \sin 5x$ نستنتج:

$$xy' + y = 5\cos 5x \implies xy'' + 2y' = -25\sin 5x$$

وبالتعويض عن $\sin 5x$ بـ yx، ينتج $xy'' + 2y' + 25yx = 0 \neq 8$. إذن العلاقة لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 24: هل أن $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+\cos x}$؟ بين ذلك.

2019 د 3

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

نعم، تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 25: برهن أن العلاقة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حلاً للمعادلة $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$.

2021 د 1 أحيائي

الحل

$$\frac{ds}{dt} = -24\sin 3t + 18\cos 3t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -72\cos 3t - 54\sin 3t = -9(8\cos 3t + 6\sin 3t) = -9s$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = -9s + 9s = 0$$

إذن العلاقة تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

السؤال 26: هل $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$؟

د 2 أحيائي 2022 د 3 تكميلي 2023

الحل

$$y = \tan x \implies y' = \sec^2 x \implies y'' = 2\sec^2 x \tan x$$

وباستخدام المتطابقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$:

$$y'' = 2y(1 + y^2)$$

نعم، تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

2. الأسئلة الوزارية حول المعادلات التي تنفصل متغيراتها

السؤال 1: حل المعادلة التفاضلية: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{3y^2 + e^y}$.

د 1 2011 د 1 أسئلة النازحين 2014 د 2 تطبيقي 2019 تمهيدي 2024

الحل

$$(3y^2 + e^y)\,dy = \cos x\,dx \implies \int (3y^2 + e^y)\,dy = \int \cos x\,dx \implies y^3 + e^y = \sin x + C$$

السؤال 2: حل المعادلة التفاضلية: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{3y^2}$.

د 1 خارج القطر 2011

الحل

$$3y^2\,dy = \cos x\,dx \implies \int 3y^2\,dy = \int \cos x\,dx \implies y^3 = \sin x + C$$

السؤال 3: حل المعادلة التفاضلية: $e^x\,dx - y^3\,dy = 0$.

د 2 2011 د 2 تطبيقي 2023

الحل

$$y^3\,dy = e^x\,dx \implies \int y^3\,dy = \int e^x\,dx \implies \frac{y^4}{4} = e^x + C_1 \implies y^4 = 4e^x + C$$

السؤال 4: حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ حيث $x = 2$، $y = 2$.

2012 د 2 | 2018 د 1 خارج القطر | 2024 د 2

الحل

$$\frac{dy}{y-1} = (x+1)\,dx \implies \int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)\,dx \implies \ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

عند $x = 2,\ y = 2$:

$$\ln|2-1| = \frac{1}{2}(4) + 2 + C \implies 0 = 4 + C \implies C = -4$$

إذن الحل الخاص هو:

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$$

السؤال 5: حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} + xy = 3x$ حيث $x = 1$، $y = 2$.

2013 د 2 | 2014 د 3

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy = x(3-y) \implies \frac{dy}{3-y} = x\,dx$$

$$-\int \frac{-dy}{3-y} = \int x\,dx \implies -\ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + C$$

عند $x = 1,\ y = 2$:

$$-\ln|1| = \frac{1}{2} + C \implies C = -\frac{1}{2}$$

$$-\ln|3-y| = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \implies \ln|3-y| = \frac{1-x^2}{2} \implies y = 3 - e^{\frac{1-x^2}{2}}$$

اخترنا الإشارة السالبة لأن $y(1) = 2$.

السؤال 6: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية: $\tan^2 y\,dy = \sin^3 x\,dx$.

د 4 أسئلة الأنبار 2014

الحل

$$\int (\sec^2 y - 1)\,dy = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = \int (\sin x - \cos^2 x \sin x)\,dx$$

$$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

السؤال 7: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = 2y$.

د 2 2015 | تمهيدي أحيائي 2023 | د 3 تكميلي 2023 | د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x+1} \implies \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x+1} \implies \ln|y| = 2\ln|x+1| + C$$

$$\ln \frac{|y|}{(x+1)^2} = C \implies |y| = e^C(x+1)^2 \implies y = \pm C_1(x+1)^2$$

وبضم الحل الثابت $y = 0$، يكون الحل العام $y = C_2(x+1)^2$ حيث $C_2 \in \mathbb{R}$.

السؤال 8: حل المعادلة التفاضلية: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{6y^2 + e^y}$.

د 3 2015 | تمهيدي تطبيقي 2023

الحل

$$(6y^2 + e^y)\,dy = \sin x\,dx \implies \int (6y^2 + e^y)\,dy = \int \sin x\,dx \implies 2y^3 + e^y = -\cos x + C$$

السؤال 9: أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2$، $y = 9$.

د 1 2016 | د 1 أسئلة الموصل 2017 | تمهيدي 2025

الحل

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \implies y^{-\frac{1}{2}}\,dy = x\,dx \implies \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int x\,dx \implies 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

عند $x = 2,\ y = 9$:

$$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(4) + C \implies 6 = 2 + C \implies C = 4$$

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4 \implies \sqrt{y} = \frac{1}{4}x^2 + 2 \implies y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2$$

السؤال 10: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية: $xy\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$.

د 1 خارج القطر 2016 | د 2 2018 | د 1 تطبيقي 2019

الحل

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \implies \frac{y}{1-2y^2}\,dy = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{-4y}{1-2y^2}\,dy = \int \frac{dx}{x} \implies -\frac{1}{4}\ln|1-2y^2| = \ln|x| + C$$

بأخذ الأس واستيعاب الإشارة في ثابت حقيقي نحصل على $x^4(1-2y^2) = C_1$، ويشمل $C_1 = 0$ الحلّين الثابتين $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

السؤال 11: حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y' = 2e^x y^3$ عند $x = 0$، $y = \frac{1}{2}$.

د 3 2016 د 3 2019

الحل

$$y^{-3}\,dy = 2e^x\,dx \implies \int y^{-3}\,dy = \int 2e^x\,dx \implies -\frac{1}{2y^2} = 2e^x + C$$

عند $x = 0,\ y = \frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2e^0 + C \implies -2 = 2 + C \implies C = -4$$

$$-\frac{1}{2y^2} = 2e^x - 4 \implies \frac{1}{y^2} = 8 - 4e^x \implies y = \frac{1}{\sqrt{8 - 4e^x}},\quad x < \ln 2$$

اخترنا الجذر الموجب لأن $y(0) = \frac{1}{2}$.

السؤال 12: حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث $x = 0$، $y = 0$.

د 2 2017 د 1 تطبيقي 2023

الحل

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^y \implies e^{-y}\,dy = e^{2x}\,dx \implies -e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

عند $x = 0,\ y = 0$:

$$-1 = \frac{1}{2} + C \implies C = -\frac{3}{2}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \implies e^{-y} = \frac{3 - e^{2x}}{2} \implies e^y = \frac{2}{3 - e^{2x}}$$

إذن $y = \ln\left(\frac{2}{3-e^{2x}}\right)$ على الفترة $x < \frac{\ln 3}{2}$.

السؤال 13: حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y'x = \cos^2 y$ عند $x = 1$، $y = \frac{\pi}{4}$.

تمهيدي 2018

الحل

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{x} \implies \int \sec^2 y\, dy = \int \frac{dx}{x} \implies \tan y = \ln|x| + C$$

عند $x = 1,\ y = \frac{\pi}{4}$:

$$\tan\frac{\pi}{4} = \ln|1| + C \implies 1 = 0 + C \implies C = 1 \implies \tan y = \ln|x| + 1$$

السؤال 14: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية: $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$.

د 1 2019

الحل

$$\sin x \cos y\, dy = -\cos x \sin y\, dx \xrightarrow{\div(\sin x \sin y)} \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = -\frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \implies \ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + C$$

بضم الحلول الثابتة $y = n\pi$، $n \in \mathbb{Z}$، يُكتب الحل العام $\sin x \sin y = C_1$ حيث $C_1 \in \mathbb{R}$.

السؤال 15: جد حل المعادلة التفاضلية: $dy = \sin x \cos^2 y\, dx$ حيث $\cos y \neq 0$، $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

د 3 تطبيقي 2019 | د 2 أحيائي 2023 | د 3 تطبيقي 2023

الحل

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x\, dx \implies \int \sec^2 y\, dy = \int \sin x\, dx \implies \tan y = -\cos x + C$$

السؤال 16: حل المعادلة التفاضلية الآتية: $\frac{dy}{\sin^3 x} = \frac{dx}{\tan^2 y}$.

د 1 تطبيقي 2021 | د 1 أحيائي 2023 | د 1 2025

الحل

$$\tan^2 y\, dy = \sin^3 x\, dx \implies \int (\sec^2 y - 1)\, dy = \int (1 - \cos^2 x) \sin x\, dx$$

$$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

السؤال 17: حل المعادلة التفاضلية: $x \cos^2 y\, dx + \tan y\, dy = 0$.

د 2 أحيائي 2021 | د 2 تطبيقي 2021 | د 3 أحيائي 2023

الحل

$$\tan y\, dy = -x \cos^2 y\, dx \implies \frac{\tan y}{\cos^2 y}\, dy = -x\, dx \implies \int \tan y \sec^2 y\, dy = \int (-x)\, dx$$

$$\frac{1}{2}\tan^2 y = -\frac{1}{2}x^2 + C \implies \tan^2 y = -x^2 + 2C \quad \left(\text{أو } \sec^2 y = -x^2 + 2C\right)$$

السؤال 18: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$.

د 1 2024 | د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$y\frac{dy}{dx} = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}} \implies (1+y^2)^{-\frac{3}{2}} y\, dy = 4\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int (1+y^2)^{-\frac{3}{2}} (2y)\, dy = \int 4\, dx \implies -\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + C$$

السؤال 19: حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y$.

د 3 2024 | د 3 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x\, dx \implies \int \sec^2 y\, dy = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx \implies \tan y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

وتوجد أيضاً الحلول الثابتة $y = (2n+1)\frac{\pi}{2}$، $n \in \mathbb{Z}$.

السؤال 20: حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 0$ عند e^{x+2y}، $x = 0$، $y = 0$.

د 2 2025

الحل

$$\frac{dy}{dx} = -e^x \cdot e^{2y} \implies e^{-2y}\, dy = -e^x\, dx \implies -\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^x + C$$

عند $x = 0,\ y = 0$:

$$-\frac{1}{2} = -1 + C \implies C = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^x + \frac{1}{2} \xrightarrow{\times(-2)} e^{-2y} = 2e^x - 1 \implies \frac{1}{e^{2y}} = 2e^x - 1$$