5 المعادلات التفاضلية

نفهم الفكرة... ونحلّها خطوة خطوة.



بداية الرحلة

خطوة صغيرة بالفهم، خطوة كبيرة بالحل.

أولاً: مفاهيم أساسية

- **المعادلة التفاضلية:** هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة (أي للمتغير التابع في المعادلة).
- **ملاحظة:** إن المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغيرين: المتغير الأول متغير مستقل وليكن (x)، ودالة غير معرفة ولتكن مثلاً (y) وبعض مشتقات الدالة (y) بالنسبة للمتغير (x)، مثلاً:
  - $\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$
  - $y' + x^2y + x = y$
  - $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$
  - $x^2y'' + 5xy' - x^3y = 0$
  - $y^{(4)} + \cos y + x^2yy' = 0$
  - $(y'')^2 + 2y' + x^2 \ln x = 5$

  تُسمى هذه معادلات تفاضلية اعتيادية لأن المتغير (y) يعتمد فقط على المتغير (x).
- **رتبة المعادلة التفاضلية:** وهي رتبة أعلى مشتقة موجودة في المعادلة التفاضلية.
- **درجة المعادلة التفاضلية:** وهي أكبر قوة (أس) مرفوعة له أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.



«أبدأ بأبسط الأمور وأسهلها معرفةً، ثم أرتقي خطوةً خطوةً إلى معرفة أعقدها.»

رينيه ديكارت

مقال عن المنهج، الجزء الثاني

أمثلة على تحديد الرتبة والدرجة

المعادلة التفاضلية	الرتبة والدرجة
$\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$	من الرتبة الأولى والدرجة الأولى
$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$	من الرتبة الثانية والدرجة الأولى
$(y''')^3 + y' - y = 0$	من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة
$y'' + 2y(y')^3 = 0$	من الرتبة الثانية والدرجة الأولى
$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x^3 - 5$	من الرتبة الأولى والدرجة الرابعة
$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$	من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية
$y^{(4)} + \cos y + x^2yy' = 0$	من الرتبة الرابعة والدرجة الأولى

ملاحظة: درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات أعلى رتبة تظهر في المعادلة. فمثلاً المعادلة $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$ من الرتبة الثانية لأن أعلى مشتقة فيها هي y''، وحيث يمكن إزالة الأسس الكسرية والجذور (بتربيع الطرفين) نحصل على $(y'')^4 = 1 + (y')^2$، وبذلك تكون درجة المعادلة **الرابعة**.

ثانياً: حل المعادلات التفاضلية

تعريف: حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو أية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث أن هذه العلاقة خالية من المشتقة ومعرفة على فترة معينة وتحقق المعادلة التفاضلية، أي دالة مجهولة بدلالة متغير مستقل تحقق المعادلة التفاضلية.



«إن كنتُ قد رأيتُ أبعد، فذلك لأنني وقفتُ على أكتاف العمالقة.»

إسحاق نيوتن

رسالة إلى روبرت هوك

مثال (1) بيّن أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة $xy' = x^2 + y$.

وزاري 3 د 2013 1 د 2014

الحل

$$y = x^2 + 3x \quad \ldots(1)$$

$$y' = 2x + 3 \quad \ldots(2)$$

بالتعويض في طرفي المعادلة التفاضلية:

$$\text{L.H.S} = xy' = x(2x+3) = 2x^2 + 3x$$

$$\text{R.H.S} = x^2 + y = x^2 + (x^2 + 3x) = 2x^2 + 3x$$

بما أن L.H.S = R.H.S، إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

الحل الخاص والحل العام للمعادلة التفاضلية

إن أصل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو علاقة بين x, y تحقق المعادلة. إن **الحل العام** لأي معادلة تفاضلية هو حل يشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساوٍ لرتبة المعادلة؛ فإذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى وجب أن يكون حلها مشتملاً على ثابت اختياري واحد (وهو ثابت التكامل) الذي يظهر عند إجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الأولى، أما إذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب أن يكون حلها مشتملاً على (ثابتي التكامل) نظراً لإجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية، وهكذا بالنسبة للمعادلات التي لها رتبة أعلى.

مثال (2) أثبت أن $y = x\ln x - x$ أحد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y$، حيث $x > 0$.

صيغة أخرى للسؤال

أثبت أن $y = x\ln|x| - x$ أحد حلول المعادلة التفاضلية $x\dfrac{dy}{dx} = x + y$، $x > 0$.

وزاري تمهيدي 2016 تمهيدي تطبيقي 2023 د1 تطبيقي 2023

الحل

$$y = x\ln x - x \implies \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \cdot (1) - 1 \implies \frac{dy}{dx} = \ln x$$

$$\text{L.H.S} = x\frac{dy}{dx} = x\ln x$$

$$\text{R.H.S} = x + y = x + (x\ln x - x) = x\ln x$$

بما أن L.H.S = R.H.S، إذن العلاقة المعطاة هي أحد حلول المعادلة التفاضلية أعلاه.

مثال (3) بيّن أن $\ln y^2 = x + a$، $a \in \mathbb{R}$ حلاً للمعادلة $2y' - y = 0$.

وزاري د 2 2014 د 3 أحيائي 2023 د 3 تطبيقي 2023

الحل

$$\ln y^2 = x + a \implies 2\ln|y| = x + a \implies 2\left(\frac{y'}{y}\right) = 1 \implies 2y' = y \implies 2y' - y = 0$$

إذن العلاقة المعطاة $\ln y^2 = x + a$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

مثال (4) هل $y = x^3 + x - 2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$؟

وزاري د 2 خارج القطر 2017

الحل

$$y = x^3 + x - 2 \implies \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \implies \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

إذن العلاقة المعطاة $y = x^3 + x - 2$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

مثال (5) هل أن $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$؟

وزاري د 2 2017

الحل

$$y^2 = 3x^2 + x^3 \implies 2yy' = 6x + 3x^2$$

نشتق مرة ثانية:

$$\left[2yy'' + 2(y')^2 = 6 + 6x\right] \div 2 \implies yy'' + (y')^2 = 3 + 3x$$

$$\text{L.H.S} = yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5 = \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة ليست حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.



«فعلُ التعلّم هو ما يمنح أعظم متعة.»

كارل فريدريش غاوس

رسالة إلى فاركاش بولياي، ١٨٠٨

مثال (6) برهن أن $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.

وزاري د 1 خارج القطر 2013 د 1 2015 تمهيدي تطبيقي 2017 تمهيدي تطبيقي 2021 د 1 2024

د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x \quad \ldots(1)$$

$$y' = -3\sin 2x(2) + 2\cos 2x(2) = -6\sin 2x + 4\cos 2x$$

$$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x \quad \ldots(2)$$

بتعويض (1) و (2) في الطرف الأيسر للمعادلة:

$$\text{L.H.S} = (-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$$

$$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x = 0 = \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

مثال (7) بيّن أن $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$.

وزاري د 1 خارج القطر 2011 د 2 2011 د 4 أسئلة النازحين 2015

الحل

$$y = e^{2x} + e^{-3x} \implies y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x} \implies y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$\text{L.H.S} = y'' + y' - 6y = (4e^{2x} + 9e^{-3x}) + (2e^{2x} - 3e^{-3x}) - 6(e^{2x} + e^{-3x})$$

$$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0 = \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

مثال (8) هل أن المعادلة $y = 3e^{-2x}$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' = 2y$؟

الحل

- نجد المشتقة الأولى: $y' = 3e^{-2x}(-2) = -6e^{-2x}$
- نجد المشتقة الثانية: $y'' = 12e^{-2x}$

$$\text{L.H.S} = y'' + y' = 12e^{-2x} + (-6e^{-2x}) = 6e^{-2x}$$

$$\text{R.H.S} = 2y = 2(3e^{-2x}) = 6e^{-2x}$$

بما أن $\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$، إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

مثال (9) هل العلاقة $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$؟

الحل

نستخدم المتطابقة $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$:

$$y = \cos 2x \implies y' = -2\sin 2x \implies y'' = -2\cos 2x(2) = -4\cos 2x$$

$$\text{L.H.S} = y'' + 4y = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0 = \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

أسئلة واجب H.W

[1] هل أن المعادلة $xy = \cos 2x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' = -4xy$؟

[2] هل أن المعادلة $y^2 = x^4 + x^3 + x^2$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 = 6x^2 + 3x + 1$؟

حل تمارين (5 - 1)

س1 بيّن درجة ورتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية:

1. $(x^2 - y^2) + 3xy\frac{dy}{dx} = 0$

الحل

رتبة أولى، درجة أولى.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 5y = 7$

الحل

رتبة ثانية، درجة أولى.

3. $(y''')^3 - 2y' + 8y = x^3 + \cos x$

الحل

رتبة ثالثة، درجة ثالثة.

4. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 0$

الحل

رتبة ثالثة، درجة ثانية.

س2 برهن أن $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$.

وزاري 2012 د 1 خارج القطر 2013 د 1 2025 تمهيدي

الحل

$$y = \sin x \implies y' = \cos x \implies y'' = -\sin x$$

$$\text{L.H.S} = y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 = \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

س3 برهن أن العلاقة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$.

وزاري 2021 د 1 أحيائي

الحل

$$s = 8\cos(3t) + 6\sin(3t)$$

$$\frac{ds}{dt} = 8(-\sin 3t)\cdot 3 + 6(\cos 3t)\cdot 3 = -24\sin 3t + 18\cos 3t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -24\cos(3t)\cdot 3 + 18(-\sin 3t)\cdot 3 = -72\cos 3t - 54\sin 3t$$

$$\text{L.H.S} = \frac{d^2s}{dt^2} + 9s = -72\cos 3t - 54\sin 3t + 9(8\cos 3t + 6\sin 3t)$$

$$= -72\cos 3t - 54\sin 3t + 72\cos 3t + 54\sin 3t = 0 = \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

س4 هل $y = x + 2$ حلاً للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$؟

الحل

$$y = x + 2 \implies y' = 1 \implies y'' = 0$$

$$\text{L.H.S} = y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + (x + 2) = x + 5 \neq x$$

$$\text{L.H.S} \neq \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة $y = x + 2$ ليست حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

س5 هل $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$؟

وزاري 2022 د 2 أحيائي 2023 د 3 تكميلي

الحل

$$y = \tan x \implies y' = \sec^2 x \implies y'' = 2\sec x(\sec x \tan x) = 2\sec^2 x \tan x$$

$$\text{R.H.S} = 2y(1 + y^2) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) = 2\tan x \sec^2 x = \text{L.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة $y = \tan x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

س6 هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة $y^3 y'' = -2$؟

وزاري 2015 د 1 خارج القطر 2016 د 2 2018 د 1 2022 د 1 أحيائي 2025 د 1

الحل

$$2x^2 + y^2 = 1 \implies 4x + 2yy' = 0 \implies 2yy' = -4x \implies yy' = -2x \implies y' = \frac{-2x}{y}$$

نشتق مرة ثانية:

$$y'' = \frac{y(-2) - (-2x)y'}{y^2} = \frac{-2y + 2x\left(\frac{-2x}{y}\right)}{y^2} = \frac{-2y - \frac{4x^2}{y}}{y^2} = \frac{\frac{-2y^2 - 4x^2}{y}}{y^2}$$

$$y'' = \frac{-2y^2 - 4x^2}{y^3} = \frac{-2(y^2 + 2x^2)}{y^3} = \frac{-2(1)}{y^3} = \frac{-2}{y^3}$$

$$\text{L.H.S} = y^3 y'' = y^3\left(\frac{-2}{y^3}\right) = -2 = \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة $(2x^2 + y^2 = 1)$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

س7 هل $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$؟

جزء من السؤال الوزاري 2015 د 2 خارج القطر 2016 د 1 خارج القطر 2017 تمهيدي 2018 تمهيدي 2019 د 1 2024 د 2 2025 د 2

الحل

$$yx = \sin 5x \implies y + xy' = 5\cos 5x \implies y' + xy'' + y' = -25\sin 5x$$

$$xy'' + 2y' + 25\sin 5x = 0 \implies xy'' + 2y' + 25yx = 0$$

إذن العلاقة المعطاة $yx = \sin 5x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

س8 بيّن أن $y = ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

وزاري تمهيدي 2012 د 2 2012 د 1 2013 د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل

$$y = ae^{-x} \implies y' = ae^{-x}(-1) = -ae^{-x}$$

$$\text{L.H.S} = y' + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = \text{R.H.S}$$

إذن العلاقة المعطاة $y = ae^{-x}$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

س9 بيّن أن $\ln|y| = x^2 + c$، $c \in \mathbb{R}$ هو حلاً للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$.

وزاري د 1 2012 تمهيدي 2015 د 2 2015 د 2 خارج القطر 2016 د 1 2017 تمهيدي 2019
د 1 خارج القطر تطبيقي 2019 تمهيدي أحيائي 2023 تمهيدي 2024

الحل

$$\ln|y| = x^2 + c \implies \frac{y'}{y} = 2x \implies y' = 2xy$$

نشتق مرة ثانية:

$$y'' = 2xy' + 2y = 2x(2xy) + 2y = 4x^2y + 2y$$

إذن العلاقة المعطاة $\ln|y| = x^2 + c$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه.

ثالثاً: حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

أولاً: المعادلات التي تنفصل متغيراتها

في هذا النوع من المعادلات نستطيع أن نعزل كل الحدود التي تحتوي على (x) مع (dx) في طرف، والحدود التي تحتوي على (y) مع (dy) في الطرف الآخر، فنحصل على $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ ثم نكامل الطرفين فنحصل على:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c$$

حيث يمثل (c) ثابت التكامل.

مثال (1) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$.

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \implies dy = (2x + 5)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x + 5)\,dx \implies y = x^2 + 5x + c$$

مثال (2) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$.

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 1}{y} \implies y\,dy = (x - 1)\,dx$$

$$\int y\,dy = \int (x - 1)\,dx \implies \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c \xrightarrow{\times 2} y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 2c} \implies y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + c_1} \quad (\text{حيث } c_1 = 2c)$$

مثال (3) حل المعادلة $dy = \sin x \cos^2 y\,dx$ حيث $\cos y \neq 0$، $y \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$.

وزاري 2019 د 3 تطبيقي 2023 د 2 أحيائي 2023 د 3 تطبيقي

الحل

نجعل المعادلة بالصيغة $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ بالقسمة على $\cos^2 y$:

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x\,dx \implies \sec^2 y\,dy = \sin x\,dx$$

$$\int \sec^2 y\,dy = \int \sin x\,dx \implies \tan y = -\cos x + c$$



«يمكن اكتشاف القوانين البسيطة والثابتة بالملاحظة.»

جوزيف فوريه

النظرية التحليلية للحرارة، المقدّمة

مثال (4) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ عندما $x = 0, y = 0$.

وزاري د 2 2017 د 1 تطبيقي 2023

الحل

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \implies dy = e^{2x}e^{y}\,dx \implies \frac{dy}{e^{y}} = e^{2x}\,dx \implies e^{-y}\,dy = e^{2x}\,dx$$

$$\int e^{-y}\,dy = \int e^{2x}\,dx \implies -\int e^{-y}(-1)\,dy = \frac{1}{2}\int e^{2x}(2)\,dx$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

وبالتعويض $x = 0, y = 0$:

$$-e^{0} = \frac{1}{2}e^{2(0)} + c \implies -1 = \frac{1}{2} + c \implies c = -\frac{3}{2}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \implies -e^{-y} = \frac{1}{2}(e^{2x} - 3)$$

$$\frac{-1}{e^{y}} = \frac{e^{2x} - 3}{2} \implies e^{y}(e^{2x} - 3) = -2 \implies e^{y} = \frac{-2}{e^{2x} - 3}$$

بأخذ ln للطرفين على الفترة التي تحقق الشرط الابتدائي:

$$\ln e^{y} = \ln\left(\frac{2}{3 - e^{2x}}\right) \implies y = \ln\left(\frac{2}{3 - e^{2x}}\right), \quad x < \frac{\ln 3}{2}$$

مثال (5) جد حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x \sin^2 y$.

الحل

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = \sin^2 x\,dx \implies \csc^2 y\,dy = \sin^2 x\,dx$$

بأخذ التكامل للطرفين (واستخدام المتطابقة $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$):

$$\int \csc^2 y\,dy = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx$$

$$-\cot y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c \implies \cot y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) - c$$

$$\cot y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c_1 \quad (\text{حيث } c_1 = -c)$$

مثال (6) جد حلاً للمعادلة $\frac{dy}{dx} = 5^{2x+y}$.

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 5^{2x} \cdot 5^{y} \implies \frac{dy}{5^{y}} = 5^{2x}\,dx \implies 5^{-y}\,dy = 5^{2x}\,dx$$

بأخذ التكامل للطرفين:

$$\int 5^{-y}\,dy = \int 5^{2x}\,dx \implies -\frac{1}{\ln 5}\int 5^{-y}(-\ln 5)\,dy = \frac{1}{2\ln 5}\int 5^{2x}(2\ln 5)\,dx$$

$$\left[-\frac{1}{\ln 5}\cdot 5^{-y} = \frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{2x} + c\right] \times \ln 5$$

$$-5^{-y} = \frac{1}{2}5^{2x} + c\ln 5 \implies 5^{-y} = -\frac{1}{2}5^{2x} - c\ln 5$$

$$5^{-y} = -\frac{1}{2}5^{2x} + c_1 \quad (\text{حيث } c_1 = -c\ln 5)$$

مثال (7) جد حلاً للمعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2, y = 9$.

وزاري د 1 2016 | د 1 أسئلة الموصل 2017 | تمهيدي 2025

الحل

$$y' - x\sqrt{y} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \implies \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = x\,dx \implies y^{-\frac{1}{2}}\,dy = x\,dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int x\,dx \implies \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c \implies 2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

نعوض $x = 2, y = 9$ فينتج:

$$2\sqrt{9} = \frac{(2)^2}{2} + c \implies 6 = 2 + c \implies c = 4$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + 4 \implies \sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + 2 \implies y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2$$

مثال (8) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$.

وزاري د 2 2015 | تمهيدي أحيائي 2023 | د 3 تكميلي 2023 | د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل

$$(x+1)\,dy = 2y\,dx \implies \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x+1} \implies \ln|y| = 2\ln|x+1| + c \implies \ln|y| = \ln(x+1)^2 + c$$

$$\ln|y| - \ln(x+1)^2 = c \implies \ln\frac{|y|}{(x+1)^2} = c$$

بأخذ e للطرفين:

$$\frac{|y|}{(x+1)^2} = e^c \implies |y| = e^c(x+1)^2 \implies y = \pm c_1(x+1)^2 \quad (\text{حيث } c_1 = e^c)$$

وبضم الحل الثابت $y = 0$ الذي يُستبعد عند القسمة على y، يُكتب الحل العام $y = C(x+1)^2$ حيث $C \in \mathbb{R}$.

حل تمارين (5 - 2)

س1 حل المعادلات الآتية بطريقة فصل المتغيرات:

(a) $y' \cos^3 x = \sin x$

الحل

$$\frac{dy}{dx}\cos^3 x = \sin x \implies dy = \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx \implies dy = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$\int dy = \int \tan x \sec^2 x\,dx \implies y = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$



«على امتداد المسافة القصيرة التي نراها أمامنا، ثمّة الكثير ممّا ينبغي إنجازه.»

آلان تورينغ
آلات الحوسبة والذكاء

متابعة السؤال

س1 حل المعادلات الآتية بطريقة فصل المتغيرات:

(b) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x$، عند $x = 1, y = 2$

وزاري د 2 2013 د 3 2014

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy = x(3-y) \implies \frac{dy}{3-y} = x\,dx$$

$$-\int \frac{-dy}{3-y} = \int x\,dx \implies -\ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + c$$

بالتعويض $x = 1, y = 2$:

$$-\ln|3-2| = \frac{1}{2} + c \implies -\ln 1 = \frac{1}{2} + c \implies 0 = \frac{1}{2} + c \implies c = -\frac{1}{2}$$

$$-\ln|3-y| = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \implies \ln|3-y| = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$3 - y = e^{\frac{1}{2}(1-x^2)} \implies y = 3 - e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

© $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

جزء من السؤال الوزاري د 2 2012 د 1 خارج القطر 2018 د 2 2024

الحل

$$\frac{dy}{y-1} = (x+1)\,dx \implies \int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)\,dx \implies \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$|y-1| = e^{\frac{x^2}{2}+x+c} \implies y = 1 \pm e^{\frac{x^2}{2}+x+c}$$

الحل الثابت $y = 1$ يحقق المعادلة أيضاً، ويمكن جمع الحلول في $y = 1 + Ce^{\frac{x^2}{2}+x}$ حيث $C \in \mathbb{R}$.

متابعة السؤال

س1 حل المعادلات الآتية بطريقة فصل المتغيرات:

(d) $(y^2+4y-1)y' = x^2-2x+3$

الحل

$$(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = x^2-2x+3 \implies \int (y^2+4y-1)\,dy = \int (x^2-2x+3)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3}+2y^2-y = \frac{x^3}{3}-x^2+3x+c$$

(e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

وزاري 1 د 2024 | 1 د محاولات أحيائي 2024

الحل

$$y\frac{dy}{dx} = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}} \implies \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\,dx \implies \int y(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,dy = \int 4\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int (1+y^2)^{-\frac{3}{2}}(2y)\,dy = 4\int dx \implies \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 4x+c$$

$$-(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = 4x+c \implies \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x+c$$

(f) $e^x\,dx - y^3\,dy = 0$

وزاري 2 د 2011 | 2 د تطبيقي 2023

الحل

$$e^x\,dx = y^3\,dy \implies \int e^x\,dx = \int y^3\,dy \implies e^x = \frac{y^4}{4}+c$$

$$\frac{y^4}{4} = e^x - c \implies y^4 = 4e^x - 4c \implies y = \pm\sqrt[4]{4e^x+c_1} \quad (\text{حيث } c_1 = -4c)$$

متابعة السؤال

س1 حل المعادلات الآتية بطريقة فصل المتغيرات:

(g) $y' = 2e^x y^3$، عند $x = 0, y = \frac{1}{2}$

وزاري د 3 2016 د 3 2019

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \implies \frac{dy}{y^3} = 2e^x\,dx \implies \int y^{-3}\,dy = 2\int e^x\,dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c \implies \frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c \implies \frac{1}{y^2} = -4e^x - 2c$$

بالتعويض $x = 0, y = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4e^0 - 2c \implies 4 = -4 - 2c \implies -2c = 8 \implies c = -4$$

$$\frac{1}{y^2} = -4e^x + 8 \implies y^2 = \frac{1}{8 - 4e^x} \implies y = \frac{1}{\sqrt{8 - 4e^x}}, \quad x < \ln 2$$

اخترنا الجذر الموجب لأن الشرط الابتدائي هو $y(0) = \frac{1}{2}$.



«جوهر الرياضيات يكمن في حرّيتها.»

غيورغ كانتور

أسس نظرية عامة للمجموعات

س2 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

(a) $xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$

وزاري د 1 خارج القطر 2016 د 2 2018 د 1 تطبيقي 2019

الحل

$$xy\frac{dy}{dx}=1-y^2-y^2 \implies xy\frac{dy}{dx}=1-2y^2 \implies xy\,dy=(1-2y^2)\,dx$$

$$\frac{y\,dy}{1-2y^2}=\frac{dx}{x} \implies -\frac{1}{4}\int\frac{-4y\,dy}{1-2y^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{4}\ln|1-2y^2|=\ln|x|+c \implies \ln|1-2y^2|=-4\ln|x|-4c$$

بأخذ e للطرفين واستيعاب الإشارة في ثابت حقيقي:

$$|1-2y^2|=\frac{e^{-4c}}{x^4} \implies 1-2y^2=\frac{C}{x^4}$$

إذن $x^4(1-2y^2)=C$، ويشمل $C=0$ الحلّين الثابتين $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) $\sin x\cos y\frac{dy}{dx}+\cos x\sin y=0$

وزاري د 1 2019

الحل

$$\sin x\cos y\frac{dy}{dx}=-\cos x\sin y \implies \frac{\cos y}{\sin y}\,dy=-\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\int\frac{\cos y}{\sin y}\,dy=-\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx \implies \ln|\sin y|=-\ln|\sin x|+c$$

$$\ln|\sin y|+\ln|\sin x|=c \implies \ln|\sin y\sin x|=c \implies |\sin y\sin x|=e^c$$

بضم الحلول الثابتة $y=n\pi$، $n\in\mathbb{Z}$، يُكتب الحل العام $\sin x\sin y=C$ حيث $C\in\mathbb{R}$.

متابعة السؤال

س2 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

© $x\cos^2 y\,dx + \tan y\,dy = 0$

وزاري د 2 أحيائي 2021 د 2 تطبيقي 2021 د 3 أحيائي 2023

الحل

$$\tan y\,dy = -x\cos^2 y\,dx \xrightarrow{\div \cos^2 y} \frac{\tan y}{\cos^2 y}\,dy = -x\,dx$$

$$\int \tan y \sec^2 y\,dy = -\int x\,dx \implies \frac{\tan^2 y}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \implies \tan^2 y = -x^2 + 2c$$

$$\tan^2 y + x^2 = c_1 \quad (\text{حيث } c_1 = 2c)$$

(d) $\tan^2 y\,dy = \sin^3 x\,dx$

وزاري د 4 أسئلة الأنبار 2014

الحل

$$\int (\sec^2 y - 1)\,dy = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$\int \sec^2 y\,dy - \int dy = \int \sin x\,dx + \int \cos^2 x(-\sin x)\,dx$$

$$\tan y - y = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$



«طرقي في الحقيقة طرقٌ للعمل والتفكير.»

إيمي نويثر

رسالة إلى هلموت هاسه، ١٩٣١

متابعة السؤال

س2 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

(e) $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y$

وزاري د 3 2024 د 3 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x\, dx \implies \int \sec^2 y\, dy = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$$

$$\tan y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

وتوجد أيضاً الحلول الثابتة $y = (2n+1)\frac{\pi}{2}$، $n \in \mathbb{Z}$.

(f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y}$

وزاري د 1 2011 د 1 أسئلة النازحين 2014 د 2 تطبيقي 2019 تمهيدي 2024

الحل

$$(3y^2 + e^y)\, dy = \cos x\, dx \implies \int (3y^2 + e^y)\, dy = \int \cos x\, dx$$

$$\frac{3y^3}{3} + e^y = \sin x + c \implies y^3 + e^y = \sin x + c$$

(g) $e^{x+2y} + y' = 0$

جزء من السؤال الوزاري د 2 2025

الحل

$$e^x \cdot e^{2y} + \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -e^x \cdot e^{2y} \implies \frac{dy}{e^{2y}} = -e^x\, dx$$

$$\int e^{-2y}\, dy = -\int e^x\, dx \implies -\frac{1}{2}\int e^{-2y}(-2)\, dy = -\int e^x\, dx$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^x + c \implies e^{-2y} = 2e^x - 2c$$

$$e^{-2y} = 2e^x + c_1 \quad (\text{حيث } c_1 = -2c)$$

ثانياً: المعادلات التفاضلية المتجانسة

تعريف: هي المعادلة التي نستطيع كتابتها بالشكل:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

فمثلاً المعادلة $(x^4 - y^4)\frac{dy}{dx} = x^3y$ يمكن كتابتها بالصورة (بقسمة طرفي المعادلة على x^4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^4}$$

ملاحظة: بوضع x عن كل y في المعادلة، فإذا كانت الأسس متساوية فإن المعادلة متجانسة.

مثال: بيّن أي المعادلات التالية متجانسة: (تكملة المثال في الصفحات اللاحقة).



«لا طريق ملوكيًّا إلى الهندسة.»

إقليدس

كما رواه بروكلوس في شرح كتاب الأصول