5 المعادلات التفاضلية

نسخة بدون أجوبة



بداية الرحلة

خطوة صغيرة بالفهم، خطوة كبيرة بالحل.

أولاً: مفاهيم أساسية

- **المعادلة التفاضلية:** هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة (أي للمتغير التابع في المعادلة).
- **ملاحظة:** إن المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغيرين: المتغير الأول متغير مستقل وليكن (x)، ودالة غير معرفة ولتكن مثلاً (y) وبعض مشتقات الدالة (y) بالنسبة للمتغير (x)، مثلاً:
  - $\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$
  - $y' + x^2y + x = y$
  - $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$
  - $x^2y'' + 5xy' - x^3y = 0$
  - $y^{(4)} + \cos y + x^2yy' = 0$
  - $(y'')^2 + 2y' + x^2 \ln x = 5$

  تُسمى هذه معادلات تفاضلية اعتيادية لأن المتغير (y) يعتمد فقط على المتغير (x).
- **رتبة المعادلة التفاضلية:** وهي رتبة أعلى مشتقة موجودة في المعادلة التفاضلية.
- **درجة المعادلة التفاضلية:** وهي أكبر قوة (أس) مرفوعة له أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.



«أبدأ بأبسط الأمور وأسهلها معرفةً، ثم أرتقي خطوةً خطوةً إلى معرفة أعقدها.»

رينيه ديكارت

مقال عن المنهج، الجزء الثاني

أمثلة على تحديد الرتبة والدرجة

المعادلة التفاضلية	الرتبة والدرجة
$\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$	
$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$	
$(y''')^3 + y' - y = 0$	
$y'' + 2y(y')^3 = 0$	
$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x^3 - 5$	
$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$	
$y^{(4)} + \cos y + x^2yy' = 0$	

ملاحظة: درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات أعلى رتبة تظهر في المعادلة. فمثلاً المعادلة $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$ من الرتبة الثانية لأن أعلى مشتقة فيها هي y''، وحيث يمكن إزالة الأسس الكسرية والجذور (بتربيع الطرفين) نحصل على $(y'')^4 = 1 + (y')^2$، وبذلك تكون درجة المعادلة **الرابعة**.

ثانياً: حل المعادلات التفاضلية

تعريف: حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو أية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث أن هذه العلاقة خالية من المشتقة ومعرفة على فترة معينة وتحقق المعادلة التفاضلية، أي دالة مجهولة بدلالة متغير مستقل تحقق المعادلة التفاضلية.

مثال (1) بيّن أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة $xy' = x^2 + y$.

وزاري د 3 2013 د 1 2014

الحل الخاص والحل العام للمعادلة التفاضلية

إن أصل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو علاقة بين x, y تحقق المعادلة. إن **الحل العام** لأي معادلة تفاضلية هو حل يشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساوٍ لرتبة المعادلة؛ فإذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى وجب أن يكون حلها مشتملاً على ثابت اختياري واحد (وهو ثابت التكامل) الذي يظهر عند إجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الأولى، أما إذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب أن يكون حلها مشتملاً على (ثابتي التكامل) نظراً لإجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية، وهكذا بالنسبة للمعادلات التي لها رتبة أعلى.

مثال (2) أثبت أن $y = x\ln x - x$ أحد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y$، حيث $x > 0$.

صيغة أخرى للسؤال

أثبت أن $y = x\ln|x| - x$ أحد حلول المعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} = x + y$، $x > 0$.

وزاري تمهيدي 2016 تمهيدي تطبيقي 2023 د 1 تطبيقي 2023

مثال (3) بيّن أن $\ln y^2 = x + a$، $a \in \mathbb{R}$ حلاً للمعادلة $2y' - y = 0$.

وزاري د 2 2014 د 3 أحيائي 2023 د 3 تطبيقي 2023

مثال (4) هل $y = x^3 + x - 2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$؟

وزاري د 2 خارج القطر 2017

مثال (5) هل أن $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$؟

وزاري د 2 2017

مثال (6) برهن أن $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.

وزاري د 1 خارج القطر 2013 د 1 2015 تمهيدي تطبيقي 2017 تمهيدي تطبيقي 2021 د 1 2024

د 1 محاولات أحيائي 2024

مثال (7) بيّن أن $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$.

وزاري د 1 خارج القطر 2011 د 2 2011 د 4 أسئلة النازحين 2015

مثال (8) هل أن المعادلة $y = 3e^{-2x}$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' = 2y$؟

مثال (9) هل العلاقة $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$؟

أسئلة واجب H.W

[1] هل أن المعادلة $xy = \cos 2x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' = -4xy$؟

[2] هل أن المعادلة $y^2 = x^4 + x^3 + x^2$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 = 6x^2 + 3x + 1$؟

تمارين (5 - 1)

س1 بيّن درجة ورتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية:

1. $(x^2 - y^2) + 3xy\frac{dy}{dx} = 0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 5y = 7$

3. $(y''')^3 - 2y' + 8y = x^3 + \cos x$

متابعة السؤال

س1 بيّن درجة ورتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية:

4. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 0$

س2 برهن أن $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$.

وزاري د 1 خارج القطر 2012 د 1 2013 تمهيدي 2025

س3 برهن أن العلاقة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$.

وزاري د 1 أحيائي 2021

س4 هل $y = x + 2$ حلاً للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$؟

س5 هل $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$؟

وزاري د 2 أحيائي 2022 د 3 تكميلي 2023

س6 هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة $y^3y'' = -2$؟

وزاري د 1 خارج القطر 2015 د 2 2016 د 1 2018 د 1 أحيائي 2022 د 1 2025

س7 هل $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$؟

جزء من السؤال الوزاري د 2 خارج القطر 2015 د 1 خارج القطر 2016 تمهيدي 2017 تمهيدي 2018

د 1 2019 د 2 2024 د 2 2025

س8 بيّن أن $y = ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

وزاري تمهيدي 2012 د 2 2012 د 1 2013 د 1 محاولات تطبيقي 2024

س9 بيّن أن $\ln|y| = x^2 + c$، $c \in \mathbb{R}$ هو حلاً للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$.

وزاري د 1 2012 تمهيدي 2015 د 2 2015 د 2 خارج القطر 2016 د 1 2017 تمهيدي 2019
د 1 خارج القطر تطبيقي 2019 تمهيدي أحيائي 2023 تمهيدي 2024

ثالثاً: حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

أولاً: المعادلات التي تنفصل متغيراتها

في هذا النوع من المعادلات نستطيع أن نعزل كل الحدود التي تحتوي على (x) مع (dx) في طرف، والحدود التي تحتوي على (y) مع (dy) في الطرف الآخر، فنحصل على $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ ثم نكامل الطرفين فنحصل على:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c$$

حيث يمثل (c) ثابت التكامل.

مثال (1) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$.

مثال (2) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$.

مثال (3) حل المعادلة $dy = \sin x \cos^2 y\,dx$ حيث $\cos y \neq 0$، $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

وزاري د 3 تطبيقي 2019 د 2 أحيائي 2023 د 3 تطبيقي 2023

مثال (4) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ عندما $x = 0, y = 0$.

وزاري د 2 2017 د 1 تطبيقي 2023

مثال (5) جد حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x \sin^2 y$.

مثال (6) جد حلاً للمعادلة $\frac{dy}{dx} = 5^{2x+y}$.

مثال (7) جد حلاً للمعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2, y = 9$.

وزاري د 1 2016 د 1 أسئلة الموصل 2017 تمهيدي 2025

مثال (8) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$.

وزاري د 2 2015 تمهيدي أحيائي 2023 د 3 تكميلي 2023 د 1 محاولات تطبيقي 2024

تمارين (5 - 2)

س1 حل المعادلات الآتية بطريقة فصل المتغيرات:

(a) $y' \cos^3 x = \sin x$

(b) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x$ ، عند $x = 1, y = 2$

وزاري د 2 2013 د 3 2014

© $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

جزء من السؤال الوزاري د 2 2012 د 1 خارج القطر 2018 د 2 2024

متابعة السؤال

س1 حل المعادلات الآتية بطريقة فصل المتغيرات:

(d) $(y^2+4y-1)y' = x^2-2x+3$

(e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

وزاري د 1 2024 د 1 محاولات أحيائي 2024

(f) $e^x\,dx - y^3\,dy = 0$

وزاري د 2 2011 د 2 تطبيقي 2023

(g) $y' = 2e^x y^3$، عند $x=0, y=\frac{1}{2}$

وزاري د 3 2016 د 3 2019

س2 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

(a) $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

وزاري 2016 د 1 خارج القطر | 2018 د 2 | 2019 د 1 تطبيقي

(b) $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$

وزاري 2019 د 1

© $x \cos^2 y\, dx + \tan y\, dy = 0$

وزاري 2021 د 2 أحيائي | 2021 د 2 تطبيقي | 2023 د 3 أحيائي

(d) $\tan^2 y\, dy = \sin^3 x\, dx$

وزاري 2014 د 4 أسئلة الأنبار

متابعة السؤال

س2 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

(e) $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y$

وزاري د 3 2024 د 3 محاولات أحيائي 2024

(f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y}$

وزاري د 1 2011 د 1 أسئلة النازحين 2014 د 2 تطبيقي 2019 تمهيدي 2024

(g) $e^{x+2y} + y' = 0$

جزء من السؤال الوزاري د 2 2025

ثانياً: المعادلات التفاضلية المتجانسة

تعريف: هي المعادلة التي نستطيع كتابتها بالشكل:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

فمثلاً المعادلة $(x^4 - y^4)\frac{dy}{dx} = x^3 y$ يمكن كتابتها بالصورة (بقسمة طرفي المعادلة على x^4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^4}$$

ملاحظة: بوضع x عن كل y في المعادلة، فإذا كانت الأسس متساوية فإن المعادلة متجانسة.

مثال: بيّن أي المعادلات التالية متجانسة: (تكملة المثال في الصفحات اللاحقة).



«إن كنتُ قد رأيتُ أبعد، فذلك لأنني وقفتُ على أكتاف العمالقة.»

إسحاق نيوتن

رسالة إلى روبرت هوك