وزاريات التكامل

30 درجة في الوزاري · الأسئلة والأجوبة

1. الأسئلة الوزارية حول المجاميع العليا والسفلى

السؤال 1: جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$.

د 1 خارج القطر 2011 د 2 تطبيقي 2018

الحل

- التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$ تعطي الفترات الجزئية: $[1, 2], [2, 3]$.
- نشتق الدالة لإيجاد النقاط الحرجة:

$$f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1} \implies f'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0$$

إذن لا توجد نقاط حرجة، والدالة متناقصة في مجالها، فتكون النهاية العظمى M_i عند بداية الفترة، والصغرى m_i عند نهايتها.

الفترة الجزئية $[a, b]$	$h_i = b - a$	$m_i = f(b)$	$M_i = f(a)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1, 2]$	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
$[2, 3]$	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
المجموع				$L(\sigma, f) = \frac{5}{2}$	$U(\sigma, f) = \frac{9}{2}$

$$\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx \approx \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$

السؤال 2: لتكن $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=2x^2$، جد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 f(x)\,dx$ إذا قُسمت الفترة $[1,3]$ إلى فترتين جزئيتين منتظمتين.

د1 2012

الحل

- طول الفترة الجزئية: $h=\frac{3-1}{2}=1 \implies \sigma=(1,2,3)$، والفترات الجزئية هي $[1,2],[2,3]$.
- نجد المشتقة: $f'(x)=4x=0 \implies x=0\notin[1,3]$.
- على الفترة $[1,3]$ يكون $f'(x)>0$ فالدالة متزايدة.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i=f(a)$	$M_i=f(b)$	h_im_i	h_iM_i
$[1,2]$	1	2	8	2	8
$[2,3]$	1	8	18	8	18
المجموع				$L(\sigma,f)=10$	$U(\sigma,f)=26$

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx \frac{10+26}{2}=\frac{36}{2}=18$$

السؤال 3: جد $L(\sigma,f)$ و $U(\sigma,f)$ حيث أن $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$، $f(x)=3-x$، $\sigma=(-2,0,1)$.

د1 خارج القطر 2012

الحل

- الفترات الجزئية من $\sigma=(-2,0,1)$ هي: $[-2,0],[0,1]$.
- نشتق الدالة: $f'(x)=-1<0$، إذن الدالة متناقصة ولا توجد نقاط حرجة.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i=f(b)$	$M_i=f(a)$	h_im_i	h_iM_i
$[-2,0]$	2	3	5	6	10
$[0,1]$	1	2	3	2	3
المجموع				$L(\sigma,f)=8$	$U(\sigma,f)=13$

السؤال 4: لتكن $f(x) = 3x - 3$ حيث $f : [1,4] \to \mathbb{R}$، جد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3,4)$، ثم تحقق هندسياً بحساب المنطقة تحت المنحني f.

تمهيدي خارج القطر 2014 د1 2018

الحل

- الفترات الجزئية هي: $[1,2], [2,3], [3,4]$.
- نشتق الدالة: $f'(x) = 3 > 0$، الدالة متزايدة في مجالها ولا توجد نقاط حرجة.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,2]$	1	0	3	0	3
$[2,3]$	1	3	6	3	6
$[3,4]$	1	6	9	6	9
المجموع				$L(\sigma, f) = 9$	$U(\sigma, f) = 18$

$$\int_1^4 (3x-3)\,dx = \frac{9+18}{2} = \frac{27}{2}\ \text{unit}^2$$

- **التحقق هندسياً:** عند $x = 1 \implies y = 0$، وعند $x = 4 \implies y = 9$. الشكل مثلث قائم الزاوية طول قاعدته $4 - 1 = 3$ وارتفاعه 9:

$$A = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{2}(3)(9) = \frac{27}{2}\ \text{unit}^2$$

السؤال 5: جد قيمة التكامل التالي باستخدام أربع تجزيئات منتظمة: $\int_1^5 x^3\,dx$.

د 1 خارج القطر 2014

الحل

- طول كل فترة جزئية: $h = \frac{5-1}{4} = 1 \implies \sigma = (1,2,3,4,5)$.
- نشتق الدالة: $f'(x) = 3x^2 = 0 \implies x = 0 \notin [1,5]$، والدالة متزايدة على $[1,5]$.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,2]$	1	1	8	1	8
$[2,3]$	1	8	27	8	27
$[3,4]$	1	27	64	27	64
$[4,5]$	1	64	125	64	125
المجموع				$L(\sigma,f) = 100$	$U(\sigma,f) = 224$

$$\int_1^5 x^3\,dx \approx \frac{100+224}{2} = \frac{324}{2} = 162$$

السؤال 6: جد $L(\sigma,f)$ و $U(\sigma,f)$ حيث أن $f : [1,4] \to \mathbb{R}$، $f(x) = 2x+5$، $\sigma = (1,2,3,4)$.

د 1 أسئلة النازحين 2014

الحل

- الفترات الجزئية هي: $[1,2], [2,3], [3,4]$.
- $f'(x) = 2 > 0$، الدالة متزايدة ولا توجد نقاط حرجة.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,2]$	1	7	9	7	9
$[2,3]$	1	9	11	9	11
$[3,4]$	1	11	13	11	13
المجموع				$L(\sigma,f) = 27$	$U(\sigma,f) = 33$

السؤال 7: جد قيمة التكامل $\int_2^4 (3x^2 - 3)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2, 3, 4)$.

د 1 أسئلة النازحين 2015 | د 3 2015 | د 2 2024

الحل

- الفترات الجزئية هي: $[2, 3], [3, 4]$.
- $f'(x) = 6x = 0 \implies x = 0 \notin [2, 4]$، والدالة متزايدة على $[2, 4]$.

الفترة الجزئية $[a, b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[2, 3]$	1	9	24	9	24
$[3, 4]$	1	24	45	24	45
المجموع				$L(\sigma, f) = 33$	$U(\sigma, f) = 69$

$$\int_2^4 (3x^2 - 3)\,dx \approx \frac{33 + 69}{2} = \frac{102}{2} = 51$$

السؤال 8: جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_3^5 (2x^2 - 2)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (3, 4, 5)$.

د 1 2016

الحل

- الفترات الجزئية هي: $[3, 4], [4, 5]$.
- $f'(x) = 4x = 0 \implies x = 0 \notin [3, 5]$، والدالة متزايدة على $[3, 5]$.

الفترة الجزئية $[a, b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[3, 4]$	1	16	30	16	30
$[4, 5]$	1	30	48	30	48
المجموع				$L(\sigma, f) = 46$	$U(\sigma, f) = 78$

$$\int_3^5 (2x^2 - 2)\,dx \approx \frac{46 + 78}{2} = \frac{124}{2} = 62$$

السؤال 9: لتكن $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$، جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2\,dx$ باستخدام تجزئتين منتظمتين.

د 2 خارج القطر 2016 | د 1 2017 | د 2 2019

الحل

- $h = \frac{3-1}{2} = 1 \implies \sigma = (1,2,3)$، الفترات هي $[1,2], [2,3]$.
- $f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0 \notin [1,3]$، والدالة متزايدة على $[1,3]$.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	9	4	9
المجموع				$L(\sigma,f) = 5$	$U(\sigma,f) = 13$

$$\int_1^3 x^2\,dx \approx \frac{5+13}{2} = 9$$

السؤال 10: لتكن $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3$، جد $\int_1^5 f(x)\,dx$ بتجزئتين منتظمتين وبالطريقة الهندسية.

تمهيدي 2017

الحل

- $h = \frac{5-1}{2} = 2 \implies$ الفترات الجزئية هي $[1,3], [3,5]$.
- الدالة ثابتة $f(x) = 3 \implies m_i = M_i = 3$.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,3]$	2	3	3	6	6
$[3,5]$	2	3	3	6	6
المجموع				$L(\sigma,f) = 12$	$U(\sigma,f) = 12$

$$\int_1^5 3\,dx = \frac{12+12}{2} = 12\,\text{unit}^2$$

- **بالطريقة الهندسية:** الشكل مستطيل طوله $4 = (5-1)$ وعرضه 3:

$$A = 4 \times 3 = 12\,\text{unit}^2$$

السؤال 11: لتكن $f : [2,5] \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 2x - 3$، جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_2^5 f(x)\,dx$ وبتجزئة $\sigma = (2,3,5)$، ثم جد المساحة هندسياً.

د 3 2017

الحل

- الفترات الجزئية هي: $[2,3], [3,5]$.
- $f'(x) = 2 > 0$، الدالة متزايدة ولا توجد نقاط حرجة.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[2,3]$	1	1	3	1	3
$[3,5]$	2	3	7	6	14
المجموع				$L(\sigma, f) = 7$	$U(\sigma, f) = 17$

$$\int_2^5 (2x-3)\,dx = \frac{7+17}{2} = 12\,\text{unit}^2$$

- **المساحة هندسياً:** الشكل شبه منحرف قاعدتاه $f(2) = 1$ و $f(5) = 7$، وارتفاعه $5 - 2 = 3$:

$$A = \frac{1}{2}(1+7)(5-2) = \frac{1}{2}(8)(3) = 12\,\text{unit}^2$$

السؤال 12: إذا كانت $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=3x-x^2$، جد كلاً من $L(\sigma,f)$ و $U(\sigma,f)$ مستخدماً أربع تجزيئات منتظمة.

د 2 خارج القطر 2017 تمهيدي 2019

الحل

- $h=\frac{4-0}{4}=1 \implies$ الفترات الجزئية هي $[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$.
- نشتق الدالة: $f'(x)=3-2x=0 \implies x=\frac{3}{2}\in[1,2]$.
- نحسب قيم الدالة عند الأطراف والنقطة الحرجة: $f(0)=0,\quad f(1)=2,\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4},\quad f(2)=2,\quad f(3)=0,\quad f(4)=-4$.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	m_i	M_i	h_im_i	h_iM_i
$[0,1]$	1	0	2	0	2
$[1,2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2,3]$	1	0	2	0	2
$[3,4]$	1	-4	0	-4	0
المجموع				$L(\sigma,f)=-2$	$U(\sigma,f)=\frac{25}{4}$

السؤال 13: جد $L(\sigma,f)$ و $U(\sigma,f)$ للدالة $f(x)=4x-x^2$، حيث $f:[0,4]\to\mathbb{R}$، باستخدام أربع تجزيئات منتظمة.

تمهيدي 2018

الحل

- $h=\frac{4-0}{4}=1 \implies$ الفترات الجزئية هي $[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$.
- نشتق الدالة: $f'(x)=4-2x=0 \implies x=2\in[0,4]$.
- قيم الدالة: $f(4)=0,\quad f(3)=3,\quad f(2)=4,\quad f(1)=3,\quad f(0)=0$.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	m_i	M_i	h_im_i	h_iM_i
$[0,1]$	1	0	3	0	3
$[1,2]$	1	3	4	3	4
$[2,3]$	1	3	4	3	4
$[3,4]$	1	0	3	0	3
المجموع				$L(\sigma,f)=6$	$U(\sigma,f)=14$

السؤال 14: لتكن $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3x - 2$، جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^5 f(x)\,dx$ إذا تجزأت الفترة إلى الفترات $[1,2], [2,3], [3,5]$.

د 3 2019

الحل

- الفترات الجزئية هي $[1,2], [2,3], [3,5]$.
- $f'(x) = 3 > 0$، الدالة متزايدة ولا توجد نقاط حرجة.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	7	4	7
$[3,5]$	2	7	13	14	26
المجموع				$L(\sigma, f) = 19$	$U(\sigma, f) = 37$

$$\int_1^5 (3x-2)\,dx = \frac{19+37}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

2. الأسئلة الوزارية حول التكامل المحدد

السؤال 1: جد قيمة التكامل: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

د 1 1996

الحل

$$\int_0^3 (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = 2\left[\sqrt{x+1}\right]_0^3 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2(2-1) = 2$$

السؤال 2: جد قيمة التكامل: $\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx$.

د 1 1997

الحل

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^8 (x^2-15)^{\frac{1}{2}}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2-15)^3}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(64-15)^3} - \sqrt{(16-15)^3}\right] = \frac{1}{3}\left[\sqrt{49^3} - \sqrt{1^3}\right] = \frac{1}{3}(343-1) = \frac{342}{3} = 114$$

السؤال 3: إذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx = -\frac{9}{4}$، جد قيمة $a \in \mathbb{R}$.

د 1 1998 د 3 أحيائي 2023

الحل

$$\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{a} = -\frac{9}{4} \implies \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4} \xrightarrow{\times(-4)} a^4 - 2a^2 + 1 = 9 \implies a^4 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2-4)(a^2+2) = 0$$

إما $a^2+2=0$ (يهمل لأن $a \in \mathbb{R}$)، أو $a^2-4=0 \implies a = \pm 2$.

السؤال 4: إذا كان $\int_a^b (2x+3)\,dx = 12$ ، وكان $a+2b=3$، جد قيمتي $a,b \in \mathbb{R}$.

د 2 1998

الحل

$$\left[x^2+3x\right]_a^b = 12 \implies b^2+3b-a^2-3a=12 \quad \dots(1)$$

من المعطى $a+2b=3 \implies a=3-2b \quad \dots(2)$ نعوض (2) في (1):

$$b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b)=12$$

$$b^2+3b-(9-12b+4b^2)-9+6b-12=0$$

$$-3b^2+21b-30=0 \xrightarrow{\div(-3)} b^2-7b+10=0 \implies (b-2)(b-5)=0$$

- عندما $b=2 \implies a=3-4=-1$.
- عندما $b=5 \implies a=3-10=-7$.

السؤال 5: جد قيمة التكامل: $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

د 2 2005 د 1 2002 د 1 2000

الحل

$$\frac{1}{2}\int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2+9)^3}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{25^3}-\sqrt{9^3}\right] = \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}$$

السؤال 6: جد قيمة التكامل: $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}(2x+5)\,dx$.

د 1 2001

الحل

$$\int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(2x+5)\,dx = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2+5x)^3}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{36^3}-0\right] = \frac{2}{3}(216) = 144$$

السؤال 7: جد قيمة التكامل: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$.

2001 د 2

الحل

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{-1}^{1} (3-2x)^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (3-2x)^{-2}(-2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

السؤال 8: جد قيمة التكامل: $\int_{0}^{4} \sqrt{x}(x+6)\,dx$.

2002 د 1

الحل

$$\int_{0}^{4} x^{\frac{1}{2}}(x+6)\,dx = \int_{0}^{4} \left(x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+4\sqrt{x^3}\right]_{0}^{4}$$

$$= \left(\frac{2}{5}(32)+4(8)\right)-0 = \frac{64}{5}+32 = \frac{224}{5}$$

السؤال 9: جد قيمة التكامل: $\int_{0}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$.

2003 د 2

الحل

$$\int_{0}^{1} (3-2x)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

السؤال 10: جد قيمة $a \in \mathbb{R}$ إذا كان $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$.

د 1 2004

الحل

$$\frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{-\frac{1}{2}}(2x)\,dx = 2 \implies \left[\sqrt{x^2+9}\right]_a^4 = 2$$

$$\sqrt{25} - \sqrt{a^2+9} = 2 \implies 5 - \sqrt{a^2+9} = 2 \implies \sqrt{a^2+9} = 3$$

بتربيع الطرفين: $a^2+9 = 9 \implies a^2 = 0 \implies a = 0$.

السؤال 11: جد قيمة التكامل: $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{3x^3-2x^5}\,dx$.

د 2 2003 د 1 خارج القطر 2015

الحل

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)}\,dx = \int_{-1}^1 x(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = -\frac{1}{4}\int_{-1}^1 (3-2x^2)^{\frac{1}{3}}(-4x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^1 = -\frac{3}{16}\left[(1)^{\frac{4}{3}} - (1)^{\frac{4}{3}}\right] = 0$$

السؤال 12: جد قيمة التكامل: $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2}\,dx$.

د 1 2006

الحل

$$\int_1^2 (5-2x)^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^2 (5-2x)^{-2}(-2)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5-2x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

السؤال 13: جد قيمة التكامل: $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$.

د 2 2006

الحل

ينعدم المقام عند $x = \frac{4}{3}$ داخل فترة التكامل $[1, 2]$، فنحسب النهاية عند هذه النقطة:

$$\int_1^b \frac{dx}{(3x-4)^2} = \left[-\frac{1}{3(3x-4)}\right]_1^b = \frac{1}{3(4-3b)} - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{b\to(\frac{4}{3})^-} \left(\frac{1}{3(4-3b)} - \frac{1}{3}\right) = +\infty$$

إذن التكامل غير متقارب ولا توجد له قيمة محدودة.

السؤال 14: جد قيمة التكامل: $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

تمهيدي 2008

الحل

$$\int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7 = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{1}\right) = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}$$

السؤال 15: إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx = 5$، $\int_c^b f(x)\,dx = 3$ وكانت $c \in [a, b]$، فجد قيمة $\int_a^c f(x)\,dx$.

د 1 2008

الحل

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \implies 5 = \int_a^c f(x)\,dx + 3 \implies \int_a^c f(x)\,dx = 2$$

السؤال 16: إذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 6$، $\int_1^3 g(x)\,dx = 2$، فجد $\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x]\,dx$.

د 2 2010

الحل

$$\int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx + \int_1^3 4x\,dx = 6 - 2 + \left[2x^2\right]_1^3 = 4 + (18-2) = 20$$

السؤال 17: جد قيمة التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

د 1 2009

الحل

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{4}$$

السؤال 18: جد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\,dx$.

د 1 2010 د 1 تطبيقي 2019

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin 2x)\,dx = \left[x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\cos 0\right) = \left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}+1$$

السؤال 19: جد قيمة التكامل: $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$.

د 2 2008 د 2 2009

الحل

بما أن $x > 0 \implies x \in [3,8]$ فإن $\sqrt{x^2} = x$:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}\,dx = \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \int_3^8 (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\left[\sqrt{x+1}\right]_3^8 = 2(\sqrt{9}-\sqrt{4}) = 2(3-2) = 2$$

السؤال 20: جد قيمة التكامل: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$.

د 1 2011 د 3 2016 تمهيدي 2025

الحل

$$[\ln|2+\tan x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|2+\tan\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|2+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln|2+1| - \ln|2-1| = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

السؤال 21: جد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x \, dx$.

د 1 خارج القطر 2011

الحل

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}(-\sin x)\, dx = -\left[e^{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}\right) = -(e^0 - e^1) = e - 1$$

السؤال 22: جد قيمة التكامل: $\int_{-3}^{4} |x| \, dx$.

د 1 2011

الحل

نعرّف القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

الدالة مستمرة على $[-3, 4]$ (لأن $f(0) = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$):

$$\int_{-3}^{4} |x|\, dx = \int_{-3}^{0} (-x)\, dx + \int_0^4 x\, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \left(0 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right) + (8 - 0) = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2}$$

السؤال 23: جد قيمة التكامل: $\int_0^1 (1 + e^x)^2 e^x \, dx$.

د 1 2011 د 2 2013 تمهيدي 2016 تمهيدي تطبيقي 2023 د 3 تكميلي 2023

الحل

$$\int_0^1 (1 + e^x)^2 e^x \, dx = \left[\frac{(1 + e^x)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[(1 + e)^3 - (1 + e^0)^3\right] = \frac{1}{3}\left[(1 + e)^3 - 8\right]$$

السؤال 24: جد قيمة التكامل: $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx$.

د 2 2011 د 2 2025

الحل

$$\left[\ln|x^3+4x+1|\right]_0^1 = \ln|1+4+1| - \ln|0+0+1| = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6$$

السؤال 25: جد قيمة التكامل: $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$.

تمهيدي 2012 تمهيدي 2015 د 3 2019 د 1 تطبيقي 2020 د 2 أحيائي 2022

الحل

$$\left[\ln|x^2+9|\right]_0^4 = \ln(16+9) - \ln(0+9) = \ln 25 - \ln 9 = \ln\left(\frac{25}{9}\right) = 2\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

السؤال 26: جد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$.

تمهيدي 2012

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\ln\left|\frac{1}{2}\right| - \ln|1|\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

السؤال 27: جد قيمة التكامل: $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx$.

د 1 2012 د 1 2014 د 2 2016

الحل

$$\frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}(2)\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 25} - e^{\ln 9}\right) = \frac{1}{2}(25-9) = 8$$

السؤال 28: جد قيمة التكامل: $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$.

د 1 خارج القطر 2012 | د 2 2012 | د 2 2015 | د 2 أحيائي 2021 | د 1 2024

الحل

مشتقة الأس $\sqrt{x}$ هي $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ وهي متوفرة:

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e$$

السؤال 29: جد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$.

د 3 2013 | د 2 2014 | د 2 2024

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{\pi}{4} - \tan^2 0\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

السؤال 30: جد قيمة التكامل: $\int_1^2 xe^{-\ln x}\,dx$.

د 1 خارج القطر 2014 | د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل

$$\int_1^2 xe^{\ln x^{-1}}\,dx = \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 1\,dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

السؤال 31: جد قيمة $a \in \mathbb{R}$ إذا علمت أن: $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$.

تمهيدي 2014 | د 1 2015 | د 3 2019 | د 2 تطبيقي 2021 | د 3 2024 | د 3 محاولات 2024

الحل

$$\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_1^a = 2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{a^2+a}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right) \implies \frac{a^2+a}{2}-1=2$$

$$\frac{a^2+a}{2}=3 \implies a^2+a-6=0 \implies (a+3)(a-2)=0$$

إما $a=-3$ أو $a=2$.

السؤال 32: إذا كان $f(x)=\begin{cases}3x^2, & \forall x \geq 0\\ 2x, & \forall x<0\end{cases}$، فجد $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$.

د 1 2014 | د 1 خارج القطر 2016

الحل

نثبت استمرارية الدالة عند $x=0$:

- $f(0)=3(0)^2=0$ (معرفة).
- $\lim_{x\to 0^+} 3x^2 = 0 = L_1$، و $\lim_{x\to 0^-} 2x = 0 = L_2 \implies L_1=L_2=f(0)=0$. إذن الدالة مستمرة عند $x=0$ ومستمرة على الفترة $[-1,3]$ (لأن كل فرع كثيرة حدود).

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} 2x\, dx + \int_0^3 3x^2\, dx = \left[x^2\right]_{-1}^{0} + \left[x^3\right]_0^3 = (0-1)+(27-0)=26$$

السؤال 33: أثبت أن: $\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = 30$.

د 3 2014 | د 2 خارج القطر 2017 | تمهيدي 2019 | د 2 تطبيقي 2021 | د 3 تكميلي 2023

الحل

نعرّف القيمة المطلقة:

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6, & x \geq 2 \\ 6-3x, & x < 2 \end{cases}$$

الطرف الأيسر (LHS):

$$\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = \int_{-2}^{2} (6-3x)\,dx + \int_{2}^{4} (3x-6)\,dx = \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$= [(12-6)-(-12-6)] + [(24-24)-(6-12)] = (6+18)+(0+6) = 30 = \text{RHS}$$

السؤال 34: جد قيمة التكامل: $\int_{2}^{5} xe^{-\ln x}\,dx$.

د 1 أسئلة النازحين 2015

الحل

$$\int_{2}^{5} xe^{\ln x^{-1}}\,dx = \int_{2}^{5} x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int_{2}^{5} dx = [x]_{2}^{5} = 5-2 = 3$$

السؤال 35: جد قيمة التكامل: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$.

تمهيدي 2017 | د 3 2024 | د 3 محاولات 2024

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = [\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - (-\ln 2) = \ln 2$$

السؤال 36: جد قيمة التكامل: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

تمهيدي 2015 | د 2 تطبيقي 2023 | د 1 2025

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos x\,dx = 2\left[\sqrt{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

السؤال 37: أثبت أن: $\int_{1}^{8} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$.

د 2 خارج القطر 2015 | د 1 2019

الحل

الطرف الأيسر (LHS):

$$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) dx$$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3}\left[\sqrt{(\sqrt[3]{x} - 1)^3}\right]_1^8 = 2\left[\sqrt{(\sqrt[3]{8} - 1)^3} - \sqrt{(\sqrt[3]{1} - 1)^3}\right] = 2(1 - 0) = 2 = \text{RHS}$$

السؤال 38: لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5)، جد $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

تمهيدي 2016

الحل

نجد قيمة x عند النهاية الصغرى:

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \implies x = -1$$

النقطة $(-1, -5)$ تحقق معادلة الدالة:

$$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k \implies -5 = -1 + k \implies k = -4 \implies f(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x - 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} + 4 - 8\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 + 4\right) = \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} - 5 = -6$$

السؤال 39: لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$، فإذا كان $\int_{1}^{6} f(x)\,dx = 6$ وكان $\int_{-2}^{6} [f(x)+3]\,dx = 32$، فجد $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

د 1 2016 | د 2 2019 | د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32 \implies \int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [3x]_{-2}^{6} = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + (18+6) = 32 \implies \int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 8$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{6} f(x)\,dx \implies 8 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6 \implies \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 2$$

السؤال 40: جد قيمة التكامل: $\int_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

تمهيدي 2017

الحل

$$2\int_{1}^{4} e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_{1}^{4} = 2(e^2 - e)$$

السؤال 41: جد قيمة التكامل: $\int_{0}^{1} \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\,dx$.

د 2 أسئلة الموصل 2017

الحل

$$\int_{0}^{1} x^{\frac{1}{2}}\left(x + 4x^{\frac{1}{2}} + 4\right)dx = \int_{0}^{1} \left(x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3} = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

السؤال 42: إذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب (a, b) ، جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$.

د 4 أسئلة النازحين 2015 | د 1 2017 | د 1 خارج القطر 2019 | د 2 أحيائي 2023

الحل

نجد نقطة الانقلاب:

$$f'(x) = 3(x-3)^2, \qquad f''(x) = 6(x-3) = 0 \implies x = 3$$

عند $x = 3$: $f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1$، إذن نقطة الانقلاب هي $a = 3, b = 1 \implies (3, 1)$.

$$\int_0^1 3(x-3)^2\,dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx = \left[(x-3)^3\right]_0^1 - 3\left[(x-3)^2\right]_0^3$$

$$= \left[(-2)^3 - (-3)^3\right] - 3\left[0 - (-3)^2\right] = (-8+27) - 3(-9) = 19 + 27 = 46$$

السؤال 43: إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x, & \forall x \geq 3 \\ 6, & \forall x < 3 \end{cases}$، فجد $\int_1^4 f(x)\,dx$.

د 2 خارج القطر 2016

الحل

نثبت استمرارية الدالة عند $x = 3$:

- $f(3) = 2(3) = 6$.
- $\lim_{x\to 3^+} 2x = 6 = L_1$، و $\lim_{x\to 3^-} 6 = 6 = L_2 \implies L_1 = L_2 = f(3) = 6$. إذن الدالة مستمرة على $[1, 4]$.

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^3 6\,dx + \int_3^4 2x\,dx = [6x]_1^3 + \left[x^2\right]_3^4 = (18-6) + (16-9) = 12 + 7 = 19$$

السؤال 44: جد قيمة التكامل: $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$.

د 4 أسئلة النازحين 2015 | تمهيدي 2018 | تمهيدي أحيائي 2023

الحل

$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx = -\int_2^3 (x^2+x+1)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3 = -\left[\left(9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+2+2\right)\right] = -\left(\frac{33}{2}-\frac{20}{3}\right) = -\frac{59}{6}$$

السؤال 45: جد قيمة التكامل: $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$.

تمهيدي تطبيقي 2020 | د 2 تطبيقي 2020

الحل

$$\int_1^3 (2x-4+5x^{-2})\,dx = \left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3 = \left(9-12-\frac{5}{3}\right)-(1-4-5)$$

$$= \left(-\frac{14}{3}\right)-(-8) = 8-\frac{14}{3} = \frac{10}{3}$$

السؤال 46: لتكن $f(x)=|2x-4|$، جد $\int_{-3}^4 f(x)\,dx$.

د 1 تطبيقي 2020 | د 2 محاولات 2024 | د 2 2025

الحل

$$f(x)=|2x-4|=\begin{cases}2x-4, & x\geq 2\\ 4-2x, & x<2\end{cases}$$

الدالة مستمرة على $[-3,4]$:

$$\int_{-3}^4 f(x)\,dx = \int_{-3}^2 (4-2x)\,dx + \int_2^4 (2x-4)\,dx = \left[4x-x^2\right]_{-3}^2 + \left[x^2-4x\right]_2^4$$

$$= [(8-4)-(-12-9)]+[(16-16)-(4-8)] = (4+21)+(0+4) = 29$$

السؤال 47: أثبت أن $F(x) = 1 - \cos x$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = \sin x$ حيث $F : [0, \frac{\pi}{6}] \to \mathbb{R}$.
ثم جد $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$ حسب المبرهنة الأساسية للتكامل.

د 1 2017

الحل

- الدالة $F(x) = 1 - \cos x$ مستمرة على $[0, \frac{\pi}{6}]$ وقابلة للاشتقاق على $(0, \frac{\pi}{6})$.
- $\forall x \in (0, \frac{\pi}{6})$ $F'(x) = \sin x = f(x)$. إذن $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) - (1 - \cos 0) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

السؤال 48: جد قيمة التكامل: $\int_0^2 |x - 1|\,dx$.

د 2 2017 د 2 أحيائي 2023

الحل

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |x - 1|\,dx = \int_0^1 (1 - x)\,dx + \int_1^2 (x - 1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left((2 - 2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

السؤال 49: إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وأن الدالة المقابلة للدالة f هي $F(x) = \sin x$، $F : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$، جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

د 2 خارج القطر 2017

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

السؤال 50: أثبت فيما إذا كانت $F(x)=x^3-7$، $F:[1,3]\to\mathbb{R}$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=3x^2$، $f:[1,3]\to\mathbb{R}$، ثم جد $\int_1^3 f(x)\,dx$.

د 3 2020

الحل

- $F(x)=x^3-7$ مستمرة على $[1,3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1,3)$ لأنها كثيرة حدود.
- $\forall x\in(1,3)\quad F'(x)=3x^2=f(x)$. إذن $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

$$\int_1^3 f(x)\,dx=F(3)-F(1)=(3^3-7)-(1^3-7)=20-(-6)=26$$

السؤال 51: جد قيمة التكامل: $\int_4^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)\,dx$.

د 1 2020

الحل

$$\int_4^1\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=-\int_1^4\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=-\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$=-\left[\left(8+\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\right]=-\left(\frac{40}{3}-\frac{7}{6}\right)=-\frac{73}{6}$$

السؤال 52: أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث $F(x)=\sin x+x$، $F:[0,\frac{\pi}{6}]\to\mathbb{R}$ و $f(x)=1+\cos x$، $f:[0,\frac{\pi}{6}]\to\mathbb{R}$، ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$.

د 1 2020 تمهيدي تطبيقي 2021 تمهيدي 2025

الحل

- $F(x)=\sin x+x$ مستمرة على $[0,\frac{\pi}{6}]$ وقابلة للاشتقاق على $(0,\frac{\pi}{6})$.
- $\forall x\in(0,\frac{\pi}{6})\quad F'(x)=\cos x+1=f(x)$. إذن $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)=\left(\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)-(\sin 0+0)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{3+\pi}{6}$$

السؤال 53: جد قيمة $b \in \mathbb{R}$ إذا علمت أن: $\int_0^b 3x\sqrt{x^2+16}\,dx = 61$.

د 2 أحيائي 2021

الحل

$$\frac{3}{2}\int_0^b (x^2+16)^{\frac{1}{2}}(2x)\,dx = 61 \implies \left[(x^2+16)^{\frac{3}{2}}\right]_0^b = 61$$

$$(b^2+16)^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}} = 61 \implies (b^2+16)^{\frac{3}{2}} - 64 = 61 \implies (b^2+16)^{\frac{3}{2}} = 125$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين ثم التربيع:

$$(b^2+16)^{\frac{1}{2}} = 5 \implies b^2+16 = 25 \implies b^2 = 9 \implies b = \pm 3$$

السؤال 54: لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$، دالة لها نهاية صغرى محلية تساوي (-5)، جد $\int_1^3 f(x)\,dx$.

د 2 تطبيقي 2020

الحل

كما في السؤال 38 نجد $f'(x) = 2x + 2 = 0 \implies x = -1$، وبالتعويض بـ $(-1, -5)$ نحصل على $k = -4 \implies f(x) = x^2 + 2x - 4$.

$$\int_1^3 (x^2+2x-4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x\right]_1^3 = (9+9-12) - \left(\frac{1}{3}+1-4\right) = 6 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{26}{3}$$

السؤال 55: لتكن $f(x) = x^2 - 4x + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$، دالة نهايتها الصغرى (-1)، جد $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

د 2 أحيائي 2022

الحل

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies x = 2$$

النقطة $(2, -1)$ تحقق الدالة:

$$-1 = (2)^2 - 4(2) + k \implies -1 = -4 + k \implies k = 3 \implies f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 4x + 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - 3\right) = \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3} + 5 = 6$$

السؤال 56: إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \forall x \geq 1 \\ 3, & \forall x < 1 \end{cases}$، فجد $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$.

تمهيدي أحيائي 2023

الحل

نثبت استمرارية الدالة عند $x = 1$:

- $f(1) = 2(1) + 1 = 3$.
- $\lim_{x \to 1^+}(2x + 1) = 3 = L_1$، و $\lim_{x \to 1^-} 3 = 3 = L_2 \implies L_1 = L_2 = f(1) = 3$. إذن الدالة مستمرة على $[0, 5]$.

$$\int_{0}^{5} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 3\,dx + \int_{1}^{5} (2x + 1)\,dx = [3x]_0^1 + \left[x^2 + x\right]_1^5 = (3 - 0) + (30 - 2) = 31$$

السؤال 57: جد قيمة التكامل: $\int_{1}^{3} 3xe^{\ln x}\,dx$.

د 1 تطبيقي 2023

الحل

$$\int_{1}^{3} 3x \cdot x\,dx = \int_{1}^{3} 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_1^3 = 27 - 1 = 26$$

السؤال 58: جد قيمة التكامل: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (x + \cos x)\, dx$.

د 1 أحيائي 2023

الحل

$$\left[\frac{x^2}{2} + \sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = (0+0) - \left(\frac{\pi^2}{8} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = 1 - \frac{\pi^2}{8}$$

السؤال 59: جد قيمة التكامل: $\int_{1}^{2} 2x^2 e^{-\ln x}\, dx$.

د 3 أحيائي 2023

الحل

$$\int_1^2 2x^2 \cdot x^{-1}\, dx = \int_1^2 2x\, dx = \left[x^2\right]_1^2 = 4 - 1 = 3$$

السؤال 60: جد قيمة التكامل: $\int_{1}^{3} 3x^3 e^{-\ln x}\, dx$.

د 2 2024

الحل

$$\int_1^3 3x^3 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int_1^3 3x^2\, dx = \left[x^3\right]_1^3 = 27 - 1 = 26$$

السؤال 61: جد قيمة التكامل: $\int_{3}^{2} \frac{x^2 - 1}{x - 1}\, dx$.

د 3 تكميلي 2023

الحل

$$\int_3^2 \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\, dx = -\int_2^3 (x+1)\, dx = -\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^3 = -\left[\left(\frac{9}{2} + 3\right) - (2+2)\right] =$$
$$-\left(\frac{15}{2} - 4\right) = -\frac{7}{2}$$

السؤال 62: إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-3,5]$ وكان $\int_1^5 f(x)\,dx = 12$ و $\int_{-3}^5 [f(x)+2x]\,dx = 54$، فجد $\int_{-3}^1 f(x)\,dx$.

د 1 2024 | د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$\int_{-3}^5 f(x)\,dx + \left[x^2\right]_{-3}^5 = 54 \implies \int_{-3}^5 f(x)\,dx + (25-9) = 54 \implies \int_{-3}^5 f(x)\,dx = 38$$

$$\int_{-3}^5 f(x)\,dx = \int_{-3}^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx \implies 38 = \int_{-3}^1 f(x)\,dx + 12 \implies \int_{-3}^1 f(x)\,dx = 26$$

السؤال 63: جد قيمة التكامل: $\int_1^3 \frac{(x^2-x)^4}{x^4}\,dx$.

د 1 2024 | د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$\int_1^3 \left(\frac{x^2-x}{x}\right)^4 dx = \int_1^3 (x-1)^4\,dx = \left[\frac{(x-1)^5}{5}\right]_1^3 = \frac{1}{5}\left(2^5-0\right) = \frac{32}{5}$$

3. الأسئلة الوزارية حول التكامل غير المحدد

السؤال 1: جد قيمة التكامل: $\int x(x^2+3)^3\,dx$.

د 1 2003

الحل

$$\frac{1}{2}\int (x^2+3)^3(2x)\,dx = \frac{1}{8}(x^2+3)^4 + C$$

السؤال 2: جد قيمة التكامل: $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}}\,dx$.

د1 2007

الحل

$$\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{3}{4}}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}(x^2+1)^{\frac{7}{4}}+C = \frac{2}{7}\sqrt[4]{(x^2+1)^7}+C$$

السؤال 3: جد قيمة التكامل: $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\,dx$.

تمهيدي 2010

الحل

$$\int 2(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int (2x+3)^{\frac{3}{2}}(2)\,dx = \frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5}+C$$

السؤال 4: جد قيمة التكامل: $\int xe^{x^2}\,dx$.

د3 2013

الحل

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

السؤال 5: جد قيمة التكامل: $\int \sqrt{e^{2x-4}}\,dx$.

د3 2014

الحل

$$\int \left(e^{2x-4}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int e^{x-2}\,dx = e^{x-2}+C$$

السؤال 6: جد قيمة التكامل: $\int \frac{x}{3x^2+5}\,dx$.

د 4 أسئلة الأنبار 2014

الحل

$$\frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+5}\,dx = \frac{1}{6}\ln|3x^2+5| + C$$

السؤال 7: جد قيمة التكامل: $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$.

د 2 2015

الحل

$$\int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\,dx = 3\int (x-2)^{\frac{2}{3}}\,dx = 3\cdot\frac{3}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}} + C = \frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + C$$

السؤال 8: جد قيمة التكامل: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$.

د 2 2016 د 3 2016 د 1 أحيائي 2023

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2}}\int \left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2\left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{x}} + C$$

السؤال 9: جد قيمة التكامل: $\int \frac{x-3}{(2x-6)^3}\,dx$.

د 1 خارج القطر 2016

الحل

$$\int \frac{x-3}{8(x-3)^3}\,dx = \frac{1}{8}\int (x-3)^{-2}\,dx = -\frac{1}{8(x-3)} + C$$

السؤال 10: جد قيمة التكامل: $\int \frac{(2-\sqrt{7x})^3}{\sqrt{5x}}\,dx$.

د 3 2017

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\int \left(2-\sqrt{7}x^{\frac{1}{2}}\right)^3 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{35}}\int \left(2-\sqrt{7}x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{35}}\cdot\frac{(2-\sqrt{7x})^4}{4}+C = -\frac{(2-\sqrt{7x})^4}{2\sqrt{35}}+C$$

السؤال 11: جد قيمة التكامل: $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx$.

د 1 تطبيقي 2019

الحل

$$\int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\,dx = \int x(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = -\frac{1}{10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}(-10x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}+C = -\frac{3}{40}\sqrt[3]{(3-5x^2)^4}+C$$

السؤال 12: جد قيمة التكامل: $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx$.

د 2 تطبيقي 2019

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^7 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{35}}\int \left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^7 \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{35}}\cdot\frac{(3-\sqrt{5x})^8}{8}+C = -\frac{1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5x})^8+C$$

السؤال 13: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

د 2 2019 د 1 2025

الحل

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{4}}(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -2\int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = -2\cdot\frac{2}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{4}{3}\sqrt{(1-\sqrt{x})^3} + C$$

السؤال 14: جد قيمة التكامل: $\int (x^2+4)^2 x\,dx$.

د 2 تطبيقي 2020

الحل

$$\frac{1}{2}\int (x^2+4)^2(2x)\,dx = \frac{1}{6}(x^2+4)^3 + C$$

السؤال 15: جد قيمة التكامل: $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx$.

د 3 2020 د 3 تطبيقي 2023 تمهيدي 2025

الحل

$$\int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx = \int (x+5)^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{5}(x+5)^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+5)^5} + C$$

السؤال 16: جد قيمة التكامل: $\int \frac{x\,dx}{(3x^2+7)^4}$.

د 3 تطبيقي 2020

الحل

$$\frac{1}{6}\int (3x^2+7)^{-4}(6x)\,dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{(3x^2+7)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{18(3x^2+7)^3} + C$$

السؤال 17: جد قيمة التكامل: $\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx$.

تمهيدي تطبيقي 2021 تمهيدي تطبيقي 2022

الحل

$$\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \ln|x^2+9| + C$$

السؤال 18: جد قيمة التكامل: $\int x\sqrt[5]{\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^5}}\,dx$.

د 1 أحيائي 2021

الحل

$$\int x\sqrt[5]{\frac{x-2}{x^5}}\,dx = \int x\cdot\frac{\sqrt[5]{x-2}}{x}\,dx = \int (x-2)^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{5}{6}(x-2)^{\frac{6}{5}} + C$$

السؤال 19: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\sqrt{x-3}}{2x-6}\,dx$.

د 2 أحيائي 2021

الحل

$$\int \frac{\sqrt{x-3}}{2(x-3)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{(x-3)}\,dx = \frac{1}{2}\int (x-3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2(x-3)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x-3} + C$$

السؤال 20: جد قيمة التكامل: $\int x^5\left(\frac{2}{x}-3x\right)^4\,dx$.

د 3 أحيائي 2023

الحل

$$\int x^5\left(\frac{2-3x^2}{x}\right)^4\,dx = \int x(2-3x^2)^4\,dx = -\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^4(-6x)\,dx = -\frac{1}{30}(2-3x^2)^5 + C$$

السؤال 21: جد قيمة التكامل: $\int (8x+12)\sqrt{2x+3}\,dx$.

2024 د 2

الحل

$$\int_C 4(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\int (2x+3)^{\frac{3}{2}}(2)\,dx = 2\cdot\frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5}\sqrt{(2x+3)^5} +$$

السؤال 22: أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها: ناتج التكامل الآتي $\int \frac{\cos\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,dx$ يساوي .....

2024 د 3 محاولات

الحل

$$2\int \cos\sqrt{x-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx = 2\sin\sqrt{x-1} + C$$

4. الأسئلة الوزارية حول تكامل الدوال المثلثية (وما ألحق بها)

السؤال 1: جد قيمة التكاملات الآتية:

$$\int (\sin x - 3\sec^2 x)\,dx$$

$$\int \cos 6x \cos 3x\,dx$$

1996 د 1

الحل

- $\int (\sin x - 3\sec^2 x)\,dx = -\cos x - 3\tan x + C$.
- $\int \cos 6x\cos 3x\,dx = \int (1-2\sin^2 3x)\cos 3x\,dx = \int \cos 3x\,dx - 2\int \sin^2 3x\cos 3x\,dx$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + C$$

السؤال 2: جد قيمة التكامل: $\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)\, dx$.

1996 د 2

الحل

$$\int (\sec^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int \left[\sec^2 x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right] dx = \tan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

السؤال 3: جد قيمة التكامل: $\int \cos 2x \sin^2 x\, dx$.

1997 د 1

الحل

$$\int \cos 2x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \int \left[\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x\right) dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + C$$

السؤال 4: جد قيمة التكامل: $\int (1 + \cos 3x)^2\, dx$.

2025 د 2 | 2013 د 2 | 1997 د 2

الحل

$$\int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)\, dx = \int \left[1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\right] dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

السؤال 5: جد قيمة التكامل: $\int (\cos x - \sin 2x)^2 \, dx$.

د1 1998

الحل

$$\int (\cos^2 x - 2\sin 2x \cos x + \sin^2 2x) \, dx =$$
$$\int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x) - 4\cos^2 x \sin x + \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right] dx$$
$$= \int \left(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

السؤال 6: جد قيمة التكامل: $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

د1 2001

الحل

$$\int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x) \, dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$$

السؤال 7: جد قيمة التكامل: $\int \sin^4 x \, dx$.

د1 2000 د1 تطبيقي 2020

الحل

$$\int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx =$$
$$\frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

السؤال 8: جد قيمة التكامل: $\int (\sin^2 x + 1)\, dx$.

تمهيدي 2006

الحل

$$\int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + 1\right] dx = \int \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

السؤال 9: جد قيمة التكامل: $\int \tan 2x \sec^3 2x\, dx$.

د 1 خارج القطر 2008

الحل

$$\int \sec^2 2x(\sec 2x \tan 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 2x(2 \sec 2x \tan 2x)\, dx = \frac{1}{6}\sec^3 2x + C$$

السؤال 10: جد قيمة التكامل: $\int \cos^2 2x \sin x\, dx$.

د 2 2008

الحل

$$\int (2\cos^2 x - 1)^2 \sin x\, dx = \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1)\sin x\, dx$$

$$= -\frac{4}{5}\cos^5 x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

السؤال 11: جد قيمة التكامل: $\int \cos^3 x\, dx$.

د 2 خارج القطر 2008 د 3 2019

الحل

$$\int \cos x(1 - \sin^2 x)\, dx = \int (\cos x - \sin^2 x \cos x)\, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

السؤال 12: جد قيمة التكامل: $\int \tan 3x \sec^5 3x \, dx$.

تمهيدي 2009

الحل

$$\int \sec^4 3x(\sec 3x \tan 3x)\, dx = \frac{1}{3}\int \sec^4 3x(3\sec 3x \tan 3x)\, dx = \frac{1}{15}\sec^5 3x + C$$

السؤال 13: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\, dx$.

تمهيدي 2010 د 1 خارج القطر 2014 د 2 أحيائي 2021

الحل

$$\int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}\, dx = \int \frac{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}\, dx = \int (1+\sin x)\cos x \, dx = \frac{1}{2}(1+\sin x)^2 + C$$

السؤال 14: جد قيمة التكامل: $\int \cot x \csc^3 x \, dx$.

د 2 2012

الحل

$$-\int \csc^2 x(-\csc x \cot x)\, dx = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

السؤال 15: جد قيمة التكامل: $\int \csc^2 x \cos x \, dx$.

د 1 2013

الحل

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

السؤال 16: جد قيمة التكامل: $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

د 1 خارج القطر 2013 | د 4 أسئلة الأنبار 2014 | د 1 أسئلة الموصل 2017 | د 2 تطبيقي 2019 | د 2 تطبيقي 2020 | د 2 تطبيقي 2023

الحل

$$\int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx = \pm\int (\sin x - \cos x)\,dx$$

$$= \pm(-\cos x - \sin x) + C = \mp(\cos x + \sin x) + C$$

السؤال 17: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx$.

د 1 2014 | د 1 2015 | د 1 خارج القطر تطبيقي 2019 | د 2 2020

الحل

$$\int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx = \int (\cos 2x + \sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

السؤال 18: جد قيمة التكامل: $\int \sin 6x\cos^2 3x\,dx$.

د 3 2014 | د 1 2016 | د 1 2020

الحل

$$\int (2\sin 3x\cos 3x)\cos^2 3x\,dx = -\frac{2}{3}\int \cos^3 3x(-3\sin 3x)\,dx = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cos^4 3x + C =$$

$$-\frac{1}{6}\cos^4 3x + C$$

السؤال 19: جد قيمة التكامل: $\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x}\,dx$.

د 1 2015

الحل

$$\frac{1}{8}\int e^{\tan 8x}(8\sec^2 8x)\,dx = \frac{1}{8}e^{\tan 8x} + C$$

السؤال 20: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$.

د 1 أسئلة النازحين 2015 تمهيدي 2019

الحل

$$\int (\sin x)^{-\frac{1}{3}} \cos x\,dx = \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x} + C$$

السؤال 21: جد قيمة التكامل: $\int (\sin 2x + \cos 2x)^2\,dx$.

د 4 أسئلة النازحين 2015

الحل

$$\int (\sin^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \int (1 + \sin 4x)\,dx = x - \frac{1}{4}\cos 4x + C$$

السؤال 22: جد قيمة التكامل: $\int \tan x\,dx$.

تمهيدي 2016

الحل

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

السؤال 23: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}\,dx$.

د 1 2016 د 3 خارج القطر 2016 تمهيدي 2017 د 2 2020

الحل

$$\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}(-2\csc^2 2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{\cot^3 2x} + C$$

السؤال 24: جد قيمة التكامل: $\int \tan^3 2x\, dx$.

د 2 2017

الحل

$$\int \tan 2x(\sec^2 2x - 1)\, dx = \int \tan 2x \sec^2 2x\, dx - \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\, dx = \frac{1}{4}\tan^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$$

السؤال 25: جد قيمة التكامل: $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$.

د 1 خارج القطر 2017

الحل

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

السؤال 26: جد قيمة التكامل: $\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x}\, dx$.

د 3 أسئلة الموصل 2017 د 2 2018 تمهيدي تطبيقي 2023

الحل

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x}\, dx = \int \tan^{-3} x \sec^2 x\, dx = \frac{\tan^{-2} x}{-2} + C = -\frac{1}{2\tan^2 x} + C$$

السؤال 27: جد قيمة التكامل: $\int x^2 \sin x^3\, dx$.

د 3 2017 د 1 تطبيقي 2023

الحل

$$\frac{1}{3}\int \sin(x^3)(3x^2)\, dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$

السؤال 28: جد قيمة التكامل: $\int \sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\, dx$.

تمهيدي 2018 | د 1 2019 | د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل

$$\frac{1}{3}\int e^{\tan 3x}(3\sec^2 3x)\, dx = \frac{1}{3}e^{\tan 3x} + C$$

السؤال 29: جد قيمة التكامل: $\int (\tan x - \sec^2 x)\, dx$.

د 1 2018

الحل

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx - \int \sec^2 x\, dx = -\ln|\cos x| - \tan x + C$$

السؤال 30: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\tan\theta}{1-\sin^2\theta}\, d\theta$.

د 3 2018

الحل

$$\int \frac{\tan\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + C$$

السؤال 31: جد تكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$.

تمهيدي تطبيقي 2019

الحل

$$[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

السؤال 32: جد قيمة التكامل: $\int_1^2 8xe^{-\ln x}\,dx$.

د 1 خارج القطر تطبيقي 2019

الحل

$$\int_1^2 8x\cdot x^{-1}\,dx=\int_1^2 8\,dx=[8x]_1^2=16-8=8$$

السؤال 33: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\cos 6x}{\cos 3x-\sin 3x}\,dx$.

د 2 2019

الحل

$$\int \frac{\cos^2 3x-\sin^2 3x}{\cos 3x-\sin 3x}\,dx=\int(\cos 3x+\sin 3x)\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\cos 3x+C$$

السؤال 34: جد قيمة التكامل: $\int \cot^3 5x\,dx$.

تمهيدي تطبيقي 2020

الحل

$$\int \cot 5x(\csc^2 5x-1)\,dx=\int \cot 5x\csc^2 5x\,dx-\int\frac{\cos 5x}{\sin 5x}\,dx=-\frac{1}{10}\cot^2 5x-\frac{1}{5}\ln|\sin 5x|+C$$

السؤال 35: جد تكامل: $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$.

د 3 تطبيقي 2020 تمهيدي تطبيقي 2021

الحل

$$\int \tan x\sec^2 x\,dx=\frac{1}{2}\tan^2 x+C \quad \left(\text{أو}\ \frac{1}{2}\sec^2 x+C\right)$$

السؤال 36: جد تكامل: $\int e^{\cos x} \sin x \, dx$.

د 1 2020

الحل

$$-\int e^{\cos x}(-\sin x)\, dx = -e^{\cos x} + C$$

السؤال 37: أثبت أن $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ حيث $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة مقابلة للدالة $f(x) = \cos 2x$ حيث $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، ثم جد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$ حسب المبرهنة الأساسية للتكامل.

تمهيدي 2020 د 2 2020

الحل

- $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \frac{1}{2}(2\cos 2x) = \cos 2x = f(x)$. إذن $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}$$

السؤال 38: جد تكامل: $\int (3 - \sin x)^2 \, dx$.

د 1 تطبيقي 2020 د 3 2020

الحل

$$\int (9 - 6\sin x + \sin^2 x)\, dx = \int \left[9 - 6\sin x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right] dx$$

$$= 9x + 6\cos x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C = \frac{19}{2}x + 6\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

السؤال 39: جد تكامل: $\int xe^{3\ln x} \, dx$.

د 1 تطبيقي 2020

الحل

$$\int xe^{\ln x^3} \, dx = \int x \cdot x^3 \, dx = \int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + C$$

السؤال 40: جد تكامل: $\int \frac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

تمهيدي تطبيقي 2021

الحل

$$2\int \csc^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = -2\cot \sqrt{x} + C$$

السؤال 41: جد التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x\, dx$.

تمهيدي تطبيقي 2021 د 1 تطبيقي 2021

الحل

$$[\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sec \frac{\pi}{3} - \sec 0 = 2 - 1 = 1$$

السؤال 42: جد تكامل: $\int \cos 2x \sin x\, dx$.

د 1 أحيائي 2021

الحل

$$\int (2\cos^2 x - 1)\sin x\, dx = \int (2\cos^2 x \sin x - \sin x)\, dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + C$$

السؤال 43: جد تكامل: $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\, dx$.

تمهيدي أحيائي 2022

الحل

$$-\int_0^{\ln 2} e^{-x}(-1)\, dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = -\left(e^{-\ln 2} - e^0\right) = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

السؤال 44: جد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \sin x \, dx$.

د 1 أحيائي 2023

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) = \ln 2$$

السؤال 45: جد تكامل: $\int \sin^2 8x \, dx$.

تمهيدي أحيائي 2023 تمهيدي 2025

الحل

$$\int \frac{1}{2}(1 - \cos 16x) \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\sin 16x + C$$

السؤال 46: جد تكامل: $\int xe^{4\ln x} \, dx$.

تمهيدي أحيائي 2023

الحل

$$\int xe^{\ln x^4} \, dx = \int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + C$$

السؤال 47: جد تكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \sin^2 x \, dx$.

د 2 أحيائي 2023

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x \cos x)\sin^2 x \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 0\right] = \frac{1}{32}$$

السؤال 48: جد تكامل: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

د 2 أحيائي 2023

الحل

$$\int \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \sin(\ln x) + C$$

السؤال 49: جد تكامل: $\int \cot^3 x\,dx$.

د 3 أحيائي 2023

الحل

$$\int \cot x(\csc^2 x - 1)\,dx = \int \cot x \csc^2 x\,dx - \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + C$$

السؤال 50: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\,dx$.

د 3 تكميلي 2023

الحل

$$\int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}\,dx = \int \sin x(1+\cos x)\,dx = \int (\sin x + \sin x\cos x)\,dx = -\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

السؤال 51: جد قيمة التكامل: $\int \cos^4 3x\,dx$.

د 1 2024 د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$\int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right] dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 12x\right) dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C$$

السؤال 52: أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها: إذا علمت أن $y = (\ln x)^2$ فإن y' يساوي .....

د 3 محاولات 2024

الحل

$$y' = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

السؤال 53: أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها: إذا علمت أن $y = \ln(2 - \cos x)$ فإن $\frac{dy}{dx}$ يساوي .....

تمهيدي 2025

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 - \cos x} \cdot (\sin x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

السؤال 54: جد قيمة التكامل: $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\, dx$.

د 1 2025

الحل

$$\int \left(\frac{\sec^3 x}{\sec x} + \frac{e^{\sin x}}{\sec x} \right) dx = \int \left(\sec^2 x + e^{\sin x} \cos x \right) dx = \tan x + e^{\sin x} + C$$

5. الأسئلة الوزارية حول المساحة المحددة بالدالة

أ- المساحة المحددة بمنحني دالة ومحور السينات

السؤال 1: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^4-4x^2$ ومحور السينات بالفترة $[1,3]$.

د1 1998

الحل

نجعل $x^2(x^2-4)=0 \implies x^4-4x^2=0 \implies f(x)=0$. إما $x=0 \notin [1,3]$، أو $x=-2 \notin [1,3]$، أو $x=2 \in [1,3]$.

$$A=\left|\int_1^2 (x^4-4x^2)\,dx\right|+\left|\int_2^3 (x^4-4x^2)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}\right]_1^2\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}\right]_2^3\right|$$

$$=\left|\left(\frac{32}{5}-\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3}\right)\right|+\left|\left(\frac{243}{5}-36\right)-\left(\frac{32}{5}-\frac{32}{3}\right)\right|=\left|-\frac{47}{15}\right|+\left|\frac{253}{15}\right|=\frac{300}{15}=20\ \text{unit}^2$$

السؤال 2: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^3-9x$ ومحور السينات بالفترة $[-3,3]$.

د1 2001 تمهيدي 2006 د1 2015

الحل

$x^3-9x=0 \implies x(x^2-9)=0 \implies x=0 \in [-3,3],\ x=\pm 3$.

$$A=\left|\int_{-3}^0 (x^3-9x)\,dx\right|+\left|\int_0^3 (x^3-9x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^0\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_0^3\right|$$

$$=\left|0-\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)-0\right|=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}=\frac{81}{2}\ \text{unit}^2$$

السؤال 3: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات بالفترة $[-2, 2]$.

تمهيدي 2007

الحل

$$x^3 - 4x = 0 \implies x(x^2 - 4) = 0 \implies x = 0 \in [-2, 2],\ x = \pm 2$$

$$A = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}\right|$$

$$= |0 - (4 - 8)| + |(4 - 8) - 0| = 4 + 4 = 8 \text{ unit}^2$$

السؤال 4: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.

د 1 2013 د 3 تطبيقي 2023

الحل

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \implies x(x - 1)(x - 2) = 0 \implies x = 0, 1, 2$$

$$A = \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{0}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{1}^{2}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

السؤال 5: جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات.

د 1 2005 د 1 خارج القطر 2019 د 2 2019

الحل

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \implies x(x + 1)(x + 3) = 0 \implies x = -3, -1, 0$$

- $A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{-1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}\right) = \frac{5}{12} - \left(-\frac{27}{12}\right) = \frac{32}{12}$.
- $A_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)\,dx = 0 - \frac{5}{12} = -\frac{5}{12}$.

$$A = |A_1| + |A_2| = \frac{32}{12} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \text{ unit}^2$$

السؤال 6: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 + 4$ ومحور السينات بالفترة $[-2, 2]$.

تمهيدي 2008 تمهيدي 2010

الحل

بما أن $3x^2 + 4 > 0$ دائماً فلا توجد تقاطعات مع محور السينات:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (3x^2 + 4)\, dx \right| = \left| \left[x^3 + 4x \right]_{-2}^{2} \right| = |(8 + 8) - (-8 - 8)| = 32 \text{ unit}^2$$

السؤال 7: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = (1 - x)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 3]$.

2012 د1

الحل

$(1 - x)^3 = 0 \implies x = 1 \in [-1, 3]$.

$$A = \left| \int_{-1}^{1} (1 - x)^3\, dx \right| + \left| \int_{1}^{3} (1 - x)^3\, dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{4}(1 - x)^4 \right]_{-1}^{1} \right| + \left| \left[-\frac{1}{4}(1 - x)^4 \right]_{1}^{3} \right|$$

$$= |0 - (-4)| + |-4 - 0| = 4 + 4 = 8 \text{ unit}^2$$

السؤال 8: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 4$ ومحور السينات بالفترة $[-2, 3]$.

2012 د1

الحل

$x^2 - 4 = 0 \implies x = -2,\ x = 2 \in [-2, 3]$.

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx \right| + \left| \int_{2}^{3} (x^2 - 4)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^{2} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{2}^{3} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{8}{3} - 8 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) \right| + \left| (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \right| = \left| -\frac{32}{3} \right| + \left| \frac{7}{3} \right| = \frac{39}{3} = 13 \text{ unit}^2$$

السؤال 9: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$، $x = 3$.

د 3 2013

الحل

$x^2 = 0 \implies x = 0 \notin [1, 3]$.

$$A = \left| \int_1^3 x^2 \, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 \right| = \left| 9 - \frac{1}{3} \right| = \frac{26}{3} \text{ unit}^2$$

السؤال 10: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

د 2 2025 د 2 2018 د 2 2016 د 1 2006 د 1 2001

الحل

نستخدم المتطابقة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$.

$$\cos 2x = 0 \implies 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(1 - 0) \right| + \left| \frac{1}{2}(0 - 1) \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ unit}^2$$

السؤال 11: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \cos 2x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

د 2 2003

الحل

نفس خطوات السؤال 10 مباشرة لأن $f(x) = \cos 2x$:

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ unit}^2$$

السؤال 12: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

د 1 خارج القطر 2016

الحل

نستخدم المتطابقة $f(x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$، وبنفس خطوات السؤال 10 نحصل على:

$$A = 1 \text{ unit}^2$$

السؤال 13: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \sin 4x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

د 1 2007 د 1 2018

الحل

$$\sin 4x = 0 \implies 4x = k\pi \implies x = \frac{k\pi}{4} \implies x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x\, dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{4}\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[-\frac{1}{4}\cos 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{4}|-1-1| + \frac{1}{4}|1-(-1)| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ unit}^2$$

السؤال 14: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \sin 2x$ ومحور السينات بالفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

د 2 2008

الحل

$$\sin 2x = 0 \implies 2x = k\pi \implies x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin 2x\, dx\right| + \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|1-(-1)| + \frac{1}{2}|-1-1| = 1 + 1 = 2 \text{ unit}^2$$

السؤال 15: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^3 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -1$، $x = 1$.

د 1 2017 د 3 أحيائي 2023

الحل

$$x^3 - x = 0 \implies x(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0 \in [-1, 1],\ x = \pm 1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|-\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

السؤال 16: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

د 2 تطبيقي 2020

الحل

$$\sin 3x = 0 \implies 3x = 0, \pi, 2\pi \implies x = 0,\ x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}\right| + \left|\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{3}(-1 - 1)\right| + \left|-\frac{1}{3}(0 - (-1))\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1\ \text{unit}^2$$

السؤال 17: جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1, 1]$.

د 3 2020 تمهيدي تطبيقي 2022 د 3 2024 د 3 محاولات 2024

الحل

$$x^4 - x^2 = 0 \implies x^2(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0 \in [-1, 1],\ x = \pm 1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^4 - x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|0 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) - 0\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\ \text{unit}^2$$

السؤال 18: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور السينات بالفترة $[-\frac{\pi}{2},\pi]$.

تمهيدي أحيائي 2021

الحل

$\sin x=0 \implies x=0\in\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right],\ x=\pi$.

$$A=\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\,dx\right|+\left|\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx\right|=\left|[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right|+\left|[-\cos x]_{0}^{\pi}\right|$$

$$=|-(1-0)|+|-(-1-1)|=1+2=3\ \text{unit}^2$$

السؤال 19: إذا كان لمنحني الدالة $y=ax^3+bx$ نهاية عظمى محلية هي $(-1,2)$، جد $a,b\in\mathbb{R}$، ثم احسب المساحة المحددة بين هذا المنحني ومحور السينات.

د 1 أحيائي 2023

الحل

- **أولاً: إيجاد** a,b: بما أن $(-1,2)$ نقطة نهاية عظمى فهي تحقق الدالة وتجعل $y'(-1)=0$:

$$2=a(-1)^3+b(-1)\implies -a-b=2\quad\ldots(1)$$

$$y'=3ax^2+b\implies 3a(-1)^2+b=0\implies 3a+b=0\quad\ldots(2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2): $2a=2\implies a=1$، وبالتعويض نجد $b=-3$. إذن معادلة المنحني هي: $y=x^3-3x$.

- **ثانياً: حساب المساحة:**

$$x^3-3x=0\implies x(x^2-3)=0\implies x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$$

$$A=\left|\int_{-\sqrt{3}}^{0}(x^3-3x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^3-3x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{3}}\right|$$

$$=\left|0-\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)-0\right|=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}\ \text{unit}^2$$

السؤال 20: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

د 2 أحيائي 2023

الحل

نستخدم المتطابقة $y = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$، وبنفس خطوات السؤال 10 نحصل على:

$$A = 1 \text{ unit}^2$$

السؤال 21: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -1$، $x = 1$.

د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل

$$x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0 \in [-1, 1],\ x = 1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (x^4 - x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^4 - x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|0 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - 0\right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1 \text{ unit}^2$$

السؤال 22: إذا كان للمنحني $f(x) = x^2 - 4x + k$ نقطة نهاية صغرى محلية تنتمي إلى محور السينات، جد:

1) قيمة $k \in \mathbb{R}$.

2) المساحة المحددة بالمنحني $f(x)$ والمستقيم $y = 4$.

د 1 2025

الحل

1. نجد k:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies x = 2$$

بما أن النهاية تنتمي لمحور السينات فإن $y = 0$، أي النقطة $(2, 0)$ تحقق الدالة:

$$0 = (2)^2 - 4(2) + k \implies k = 4 \implies f(x) = x^2 - 4x + 4$$

2. المساحة بين $f(x)$ والمستقيم $y = 4$:

$$x^2 - 4x + 4 = 4 \implies x^2 - 4x = 0 \implies x(x-4) = 0 \implies x = 0,\ x = 4$$

$$A = \left| \int_0^4 (x^2 - 4x)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^4 \right| = \left| \frac{64}{3} - 32 \right| = \frac{32}{3} \text{ unit}^2$$

ب- المساحة المحددة بمنحني دالتين

السؤال 1: جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^4 - 12$، $y = x^2$.

د 2 1997 | د 1 2008 | د 1 خارج القطر 2008 | د 1 خارج القطر 2015 | 2015 | د 3 خارج القطر 2016

الحل

$$x^4 - 12 = x^2 \implies x^4 - x^2 - 12 = 0 \implies (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0 \implies x = \pm 2$$

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x \right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 \right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 24 \right) \right| = \left| \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48 \right| = \left| -\frac{608}{15} \right| = \frac{608}{15} \text{ unit}^2$$

السؤال 2: جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$ ، $g(x)=\sin x\cos x$ حيث $x\in[0,2\pi]$.

د 2 1998 | د 1 2004 | تمهيدي 2009 | د 1 2014 | د 1 خارج القطر 2015 | د 2 أحيائي 2021 | د 1 2024

د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

نكوّن الدالة المولدة $h(x)=\sin x-\sin x\cos x=\sin x(1-\cos x)=0$.

- إما $\sin x=0 \implies x=0,\pi,2\pi\in[0,2\pi]$.
- أو $\cos x=1 \implies x=0,2\pi$.

$$A=\left|\int_0^{\pi}(\sin x-\sin x\cos x)\,dx\right|+\left|\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x-\sin x\cos x)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\pi}\right|+\left|\left[-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|=|(1-0)-(-1-0)|+|(-1-0)-(1-0)|=2+2=4\ \text{unit}^2$$

السؤال 3: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=2-x^2$ ، $g(x)=x$ بالفترة $[-2,2]$.

د 2 1999

الحل

$$h(x)=x-(2-x^2)=x^2+x-2=0 \implies (x+2)(x-1)=0 \implies x=-2,\ x=1\in[-2,2]$$

$$A=\left|\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx\right|+\left|\int_{1}^{2}(x^2+x-2)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1}\right|+\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}\right|$$

$$=\left|\left(-\frac{7}{6}\right)-\left(\frac{10}{3}\right)\right|+\left|\left(\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{7}{6}\right)\right|=\left|-\frac{27}{6}\right|+\left|\frac{11}{6}\right|=\frac{38}{6}=\frac{19}{3}\ \text{unit}^2$$

السؤال 4: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ، $g(x)=x$ بالفترة $[-1,1]$.

د1 1999 تمهيدي 2019

الحل

$$h(x)=\sqrt[3]{x}-x=0 \implies \sqrt[3]{x}=x \xrightarrow{\text{بالتكعيب}} x=x^3 \implies x(1-x^2)=0 \implies x=0,\pm1$$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}\left(x^{\frac{1}{3}}-x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{3}}-x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$=\left|0-\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{1}{4}-0\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

السؤال 5: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=x^2$ ، $g(x)=2x$ بالفترة $[1,3]$.

د1 2002

الحل

$$h(x)=x^2-2x=0 \implies x(x-2)=0 \implies x=0\notin[1,3],\ x=2\in[1,3]$$

$$A=\left|\int_{1}^{2}(x^2-2x)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{1}^{2}\right|+\left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{2}^{3}\right|$$

$$=\left|\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|+\left|0-\left(-\frac{4}{3}\right)\right|=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2\ \text{unit}^2$$

السؤال 6: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=3x^2$ ، $g(x)=x^4-4$.

د2 2002

الحل

$$h(x)=x^4-3x^2-4=0 \implies (x^2-4)(x^2+1)=0 \implies x=\pm2$$

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$=\left|\left(\frac{32}{5}-16\right)-\left(-\frac{32}{5}+16\right)\right|=\left|\frac{64}{5}-32\right|=\frac{96}{5}\ \text{unit}^2$$

السؤال 7: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = 1 + \cos x$ ، $y = -\cos x$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2004 د 2

الحل

$$h(x) = (1 + \cos x) - (-\cos x) = 1 + 2\cos x = 0 \implies \cos x = -\frac{1}{2} \implies x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)\, dx \right| = \left| [x + 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) - 0 = \frac{\pi}{2} + 2 \text{ unit}^2$$

السؤال 8: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = \sin 2x$ ، $g(x) = \sin x$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2005 د 2

الحل

$$h(x) = \sin 2x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) = 0 \implies x = 0,\ x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\, dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \sin x)\, dx \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \right| + \left| \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = \left| \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

السؤال 9: جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = \cos^2 x$ ، $g(x) = \sin^2 x$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2009 د 2

الحل

$$h(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = 0 \implies x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ unit}^2$$

السؤال 10: جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x)=\sqrt{x}$ والمستقيم $f(x)=x$.

د 1 2011

الحل

$$h(x)=\sqrt{x}-x=0 \implies \sqrt{x}=x \implies x=x^2 \implies x(x-1)=0 \implies x=0,1$$

$$A=\left|\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{6}\ \text{unit}^2$$

السؤال 11: جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y=x^4-8$ ، $y=2x^2$.

تمهيدي 2012

الحل

$$h(x)=x^4-2x^2-8=0 \implies (x^2-4)(x^2+2)=0 \implies x=\pm 2$$

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(x^4-2x^2-8)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-8x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$=\left|\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}-16\right)-\left(-\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+16\right)\right|=\left|\frac{64}{5}-\frac{32}{3}-32\right|=\left|\frac{192-160-480}{15}\right|=\frac{448}{15}\ \text{unit}^2$$

السؤال 12: جد المساحة المحددة بين المنحنيين $f(x)=\sin^2 x$ ، $g(x)=\sin x$ بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

د 1 خارج القطر 2012

الحل

$$h(x)=\sin^2 x-\sin x=\sin x(\sin x-1)=0 \implies x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$$

$$A=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)-\sin x\right]dx\right|=\left|\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right|=\left|\frac{\pi}{4}-1\right|=1-\frac{\pi}{4}\ \text{unit}^2$$

السؤال 13: جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = 2\sin x + 1$ ، $g(x) = \sin x$ حيث $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$.

د 2 2013 د 1 أسئلة النازحين 2015

الحل

$$h(x) = (2\sin x + 1) - \sin x = \sin x + 1 = 0 \implies \sin x = -1 \implies x = \frac{3\pi}{2}$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)\, dx\right| = \left|[-\cos x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}}\right| = \left|\left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) - (-1 + 0)\right| = \frac{3\pi + 2}{2}\ \text{unit}^2$$

السؤال 14: جد المساحة المحددة بين منحني القطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيم الذي معادلته $y = 2x + 3$.

د 1 خارج القطر 2014

الحل

$$h(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (x - 3)(x + 1) = 0 \implies x = -1,\ x = 3$$

$$A = \left|\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\, dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3}\right| = \left|(9 - 9 - 9) - \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right)\right| =$$

$$\left|-9 - \frac{5}{3}\right| = \frac{32}{3}\ \text{unit}^2$$

السؤال 15: جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

تمهيدي خارج القطر 2014 | د 2 2017 | د 2 خارج القطر 2017 | د 1 تطبيقي 2019 | د 2 تطبيقي 2021

تمهيدي تطبيقي 2023 | د 1 تطبيقي 2023 | د 3 تكميلي 2023

الحل

$$h(x)=\cos x-\sin x=0 \implies \tan x=1 \implies x=\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A=\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\,dx\right|=\left|[\sin x+\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|[\sin x+\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$=|\sqrt{2}-(-1)|+|1-\sqrt{2}|=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}\ \text{unit}^2$$

السؤال 16: جد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y=x^3$ والمستقيم $y=x$.

تمهيدي 2015 | د 3 2017 | د 3 تطبيقي 2019

الحل

$$h(x)=x^3-x=0 \implies x(x^2-1)=0 \implies x=-1,0,1$$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^3-x)\,dx\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

السؤال 17: جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $y=x^2+5x-4$ والمستقيم $y=6x+2$.

د 1 خارج القطر 2018

الحل

$$h(x)=(x^2+5x-4)-(6x+2)=x^2-x-6=0 \implies (x-3)(x+2)=0 \implies x=-2,3$$

$$A=\left|\int_{-2}^{3}(x^2-x-6)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-2}^{3}\right|=\left|\left(9-\frac{9}{2}-18\right)-\left(-\frac{8}{3}-2+12\right)\right|=\left|-\frac{125}{6}\right|=\frac{125}{6}\ \text{unit}^2$$

السؤال 18: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = -\sin x$ و $y = \cos x$ على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

د 1 أحيائي 2021

الحل

$$h(x) = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x = 0 \implies \tan x = -1 \implies x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\, dx \right| = \left| [\sin x - \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = |(1 - 0) - (0 - 1)| = 2 \text{ unit}^2$$

6. الأسئلة الوزارية حول الإزاحة والمسافة (التطبيقات الفيزيائية)

السؤال 1: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره 18 m/s^2 ، فإذا كانت سرعته قد أصبحت 82 m/s بعد مرور 4 s من بدء الحركة، جد:

a) المسافة خلال الثانية الرابعة.

b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 10 ثواني.

د 1 1997

الحل

$$v(t) = \int 18\, dt = 18t + C$$

عند $t = 4,\ v = 82 \implies 82 = 72 + C \implies C = 10 \implies v(t) = 18t + 10$.

- a) المسافة خلال الثانية الرابعة (الفترة $[3, 4]$):

$$d = \left| \int_3^4 (18t + 10)\, dt \right| = \left[9t^2 + 10t\right]_3^4 = 184 - 111 = 73 \text{ m}$$

- b) البعد بعد 10 ثواني:

$$s = \int_0^{10} (18t + 10)\, dt = \left[9t^2 + 10t\right]_0^{10} = 1000 \text{ m}$$

السؤال 2: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (2t - 4)\ \text{m/s}$، جد المسافة المقطوعة بالفترة $[1, 6]$، ثم جد بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة.

د 2 2000

الحل

- $v(t) = 2t - 4 = 0 \implies t = 2 \in [1, 6]$.

$$d = \left|\int_1^2 (2t - 4)\,dt\right| + \left|\int_2^6 (2t - 4)\,dt\right| = \left|\left[t^2 - 4t\right]_1^2\right| + \left|\left[t^2 - 4t\right]_2^6\right|$$

$$= |-4 - (-3)| + |12 - (-4)| = 1 + 16 = 17\,\text{m}$$

- البعد بعد 4 ثواني:

$$s = \int_0^4 (2t - 4)\,dt = \left[t^2 - 4t\right]_0^4 = (16 - 16) - 0 = 0\,\text{m}$$

السؤال 3: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 6t + 3)\ \text{m/s}$، احسب:

1) المسافة المقطوعة بالفترة $[2, 4]$.

2) الإزاحة المقطوعة بالفترة $[2, 4]$.

3) الزمن اللازم ليصبح التعجيل $18\ \text{m/s}^2$.

د 2 2003

الحل

- $v(t) = 3(t + 1)^2 = 0 \implies t = -1 \notin [2, 4]$.

1. المسافة:

$$d = \left|\int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)\,dt\right| = \left[t^3 + 3t^2 + 3t\right]_2^4 = 124 - 26 = 98\,\text{m}$$

2. الإزاحة:

$$s = \int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)\,dt = 98\,\text{m}$$

3. التعجيل:

$$a(t) = v'(t) = 6t + 6 = 18 \implies 6t = 12 \implies t = 2\,\text{s}$$

السؤال 4: جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته $v(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}$ m/s ، وبعده بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة يساوي 20 m، جد إزاحته عند كل t.

د 2 2003 تمهيدي 2010

الحل

$$s(t) = \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + 3t^{-\frac{1}{2}}\right) dt = t^{\frac{3}{2}} + 6t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} + C$$

عند $t = 4,\ s = 20 \implies 20 = 8 + 12 + C \implies C = 0 \implies s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}$.

السؤال 5: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $5\ \text{m/s}^2$، فإذا كان بعده من بدء الحركة يساوي 180 m بعد مرور 6 s والسرعة عندها 45 m/s، جد السرعة عند $t = 2$.

د 2 2004

الحل

$$v(t) = \int 5\, dt = 5t + C$$

عند $t = 6,\ v = 45 \implies 45 = 30 + C \implies C = 15 \implies v(t) = 5t + 15$ عند $t = 2$: $v(2) = 5(2) + 15 = 25\ \text{m/s}$.

السؤال 6: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي $(3t + 2)\ \text{m/s}^2$، جد سرعة الجسم بعد مضي 2 s من بدء الحركة، ثم جد المسافة المقطوعة بالفترة $[2, 6]$.

تمهيدي 2005

الحل

$$v(t) = \int (3t + 2)\, dt = \frac{3}{2}t^2 + 2t + C$$

عند بدء الحركة $t = 0, v = 0 \implies C = 0 \implies v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$.

- السرعة عند $t = 2$: $v(2) = 6 + 4 = 10\ \text{m/s}$.
- المسافة في $[2, 6]$ (السرعة موجبة دائماً لـ $t > 0$):

$$d = \int_2^6 \left(\frac{3}{2}t^2 + 2t\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^3 + t^2\right]_2^6 = (108 + 36) - (4 + 4) = 136\ \text{m}$$

السؤال 7: تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)$ m/s، أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة إلى موضعها الأول الذي بدأت منه، ثم احسب التعجيل عندها.

تمهيدي 2007 | د 2 2014 | د 2 2016 | د 1 2018 | د 3 محاولات 2024

الحل

$$s(t) = \int (100t - 6t^2)\,dt = 50t^2 - 2t^3 + C$$

من السكون $t = 0, s = 0 \implies C = 0 \implies s(t) = 50t^2 - 2t^3$. لعودة النقطة إلى موضعها الأول نجعل $s(t) = 0$:

$$50t^2 - 2t^3 = 0 \implies 2t^2(25 - t) = 0$$

إما $t = 0$ (يهمل)، أو $t = 25$ s.

- التعجيل عندها:

$$a(t) = v'(t) = 100 - 12t \implies a(25) = 100 - 300 = -200\ \text{m/s}^2$$

السؤال 8: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $10\ \text{m/s}^2$، وبعد 2 ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعته 24 m/s، جد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة، ثم بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة.

د 1 2007 | د 1 أحيائي 2023

الحل

$$v(t) = \int 10\,dt = 10t + C$$

عند $t = 2,\ v = 24 \implies 24 = 20 + C \implies C = 4 \implies v(t) = 10t + 4$.

- المسافة في الثانية الخامسة $[4, 5]$:

$$d = \int_4^5 (10t + 4)\,dt = \left[5t^2 + 4t\right]_4^5 = 145 - 96 = 49\ \text{m}$$

- البعد بعد 4 ثواني:

$$s = \int_0^4 (10t + 4)\,dt = \left[5t^2 + 4t\right]_0^4 = 96\ \text{m}$$

السؤال 9: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 12t + 9)\ \text{m/min}$، احسب المسافة المقطوعة بالفترة $[0, 2]$، ثم احسب الزمن اللازم الذي يصبح فيه التعجيل $18\ \text{m/min}^2$.

د 1 2009 د 2 2024

الحل

- $v(t) = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3) = 0 \implies t = 1 \in [0,2],\ t = 3 \notin [0,2]$.

$$d = \left|\int_0^1 (3t^2 - 12t + 9)\,dt\right| + \left|\int_1^2 (3t^2 - 12t + 9)\,dt\right| = \left|\left[t^3 - 6t^2 + 9t\right]_0^1\right| + \left|\left[t^3 - 6t^2 + 9t\right]_1^2\right|$$

$$= |4 - 0| + |2 - 4| = 4 + 2 = 6\ \text{m}$$

- الزمن اللازم ليصبح التعجيل 18:

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12 = 18 \implies 6t = 30 \implies t = 5\ \text{min}$$

السؤال 10: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 4t + 7)\ \text{m/s}$، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة، ثم جد التعجيل عندها.

د 2 2010

الحل

بما أن $v(t) > 0$ دائماً لـ $t \geq 0$:

- المسافة بعد 4 ثواني:

$$d = \int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)\,dt = \left[t^3 + 2t^2 + 7t\right]_0^4 = 64 + 32 + 28 = 124\ \text{m}$$

- التعجيل عند $t = 4$:

$$a(t) = v'(t) = 6t + 4 \implies a(4) = 24 + 4 = 28\ \text{m/s}^2$$

السؤال 11: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ \text{m/s}^2$، وكانت سرعته بعد مرور 4 ثواني تساوي $90\ \text{m/s}$، احسب:

a) السرعة عندما $t=2$.

b) المسافة خلال الفترة $[1,2]$.

c) الإزاحة بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

د 2 2011 | د 3 2016 | د 1 2019 | د 2 تطبيقي 2021

الحل

$$v(t)=\int(4t+12)\,dt=2t^2+12t+C$$

عند $t=4,\ v=90 \implies 90=32+48+C \implies C=10 \implies v(t)=2t^2+12t+10$.

- a) $v(2)=8+24+10=42\ \text{m/s}$.
- b) $d=\int_1^2(2t^2+12t+10)\,dt=\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_1^2=\left(\frac{16}{3}+44\right)-\left(\frac{2}{3}+16\right)=\frac{98}{3}\ \text{m}$.
- c) $s=\int_0^{10}(2t^2+12t+10)\,dt=\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_0^{10}=\frac{2000}{3}+600+100=\frac{4100}{3}\ \text{m}$.

السؤال 12: سفينة شحن (أو جسم) تتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=(3t^2-6t+3)\ \text{m/min}$، احسب:

1) المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$.

2) الإزاحة المقطوعة بعد مرور خمس دقائق من بدء الحركة (في الفترة $[0,5]$).

د 1 خارج القطر 2013 | د 4 أسئلة النازحين الأنبار 2014 | تمهيدي أحيائي 2023

الحل

- $v(t)=3(t-1)^2=0 \implies t=1\notin[2,4]$.

1. المسافة في $[2,4]$:

$$d=\int_2^4(3t^2-6t+3)\,dt=\left[t^3-3t^2+3t\right]_2^4=28-2=26\ \text{m}$$

2. الإزاحة في $[0,5]$:

$$s=\int_0^5(3t^2-6t+3)\,dt=\left[t^3-3t^2+3t\right]_0^5=125-75+15=65\ \text{m}$$

السؤال 13: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $18\,\text{m/s}^2$ ، فإذا كانت سرعته قد أصبحت $82\,\text{m/s}$ بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة، جد:

a) المسافة خلال الثانية الثانية.

b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين.

د 1 2015

الحل

كما في السؤال 1 نجد $v(t) = 18t + 10$.

- a) المسافة خلال الثانية الثانية $[1, 2]$:

$$d = \int_1^2 (18t + 10)\,dt = \left[9t^2 + 10t\right]_1^2 = 56 - 19 = 37\,\text{m}$$

- b) البعد بعد ثانيتين $[0, 2]$:

$$s = \int_0^2 (18t + 10)\,dt = \left[9t^2 + 10t\right]_0^2 = 56\,\text{m}$$

السؤال 14: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن $v(t) = 3t^2 - 6t$، فجد:

1) المسافة المقطوعة بالفترة $[1, 3]$.

2) الإزاحة المقطوعة بالفترة $[1, 3]$.

تمهيدي 2016 د 2 تطبيقي 2023

الحل

- $v(t) = 3t(t-2) = 0 \implies t = 0 \notin [1,3],\ t = 2 \in [1,3]$.

1. المسافة:

$$d = \left|\int_1^2 (3t^2 - 6t)\,dt\right| + \left|\int_2^3 (3t^2 - 6t)\,dt\right| = \left|\left[t^3 - 3t^2\right]_1^2\right| + \left|\left[t^3 - 3t^2\right]_2^3\right| = |-4 - (-2)| + |0 - (-4)| = 2 + 4 = 6 \text{ وحدة طول}$$

2. الإزاحة:

$$s = \int_1^3 (3t^2 - 6t)\,dt = \left[t^3 - 3t^2\right]_1^3 = 0 - (-2) = 2 \text{ وحدة طول}$$

السؤال 15: تتحرك سيارة من السكون وبعد t دقيقة من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(50t - 3t^2)$ km/min، جد الزمن اللازم لعودتها إلى موضعها الأول الذي بدأت منه، ثم احسب التعجيل عند ذلك الزمن.

د 1 2025 | تمهيدي 2019 | د 2 خارج القطر 2016

الحل

$$s(t) = \int (50t - 3t^2)\, dt = 25t^2 - t^3 + C$$

من السكون $s(t) = 25t^2 - t^3 \implies C = 0 \implies t = 0, s = 0$. للعودة إلى الموضع الأول نجعل $s(t) = 0$:

$$t^2(25 - t) = 0 \implies t = 0 \text{ أو (يهمل) } t = 25 \text{ min}$$

- التعجيل عندها:

$$a(t) = v'(t) = 50 - 6t \implies a(25) = 50 - 150 = -100 \text{ km/min}^2$$

السؤال 16: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t - 6)$ m/s، جد:

1) المسافة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$.

2) الإزاحة المقطوعة في الثانية الخامسة.

3) بعده بعد مضي 4 ثوانٍ من بدء الحركة.

د 2 تطبيقي 2019

الحل

1. $v(t) = 3t - 6 = 0 \implies t = 2 \in [1, 3]$.

$$d = \left|\int_1^2 (3t - 6)\,dt\right| + \left|\int_2^3 (3t - 6)\,dt\right| = \left|\left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_2^3\right|$$

$$= \left|-6 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right| + \left|-\frac{9}{2} - (-6)\right| = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3\,\text{m}$$

2. الإزاحة في الثانية الخامسة $[4, 5]$:

$$s = \int_4^5 (3t - 6)\,dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_4^5 = \left(\frac{75}{2} - 30\right) - (24 - 24) = \frac{15}{2}\,\text{m}$$

3. البعد بعد 4 ثوانٍ:

$$s = \int_0^4 (3t - 6)\,dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_0^4 = 24 - 24 = 0\,\text{m}$$

السؤال 17: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3)$ m/s، احسب الإزاحة في الفترة $[0, 5]$.

تمهيدي تطبيقي 2021

الحل

$$s = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\,dt = \left[t^3 - 3t^2 + 3t\right]_0^5 = 125 - 75 + 15 = 65\,\text{m}$$

7. الأسئلة الوزارية حول الحجوم الدورانية

السؤال 1: المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ حيث $0 \le x \le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات، جد حجمها.

د 1 خارج القطر 2011

الحل

$$y = \sqrt{x} \implies y^2 = x$$

$$V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 2: أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$، $x = 2$ حول محور السينات.

د 2 2011 | د 1 خارج القطر 2012 | تمهيدي 2014 | تمهيدي 2015 | د 3 2018 | د 1 خارج القطر تطبيقي 2019 | د 2 2025

الحل

$$V = \pi \int_0^2 8x\,dx = \pi \left[4x^2\right]_0^2 = 16\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 3: أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0$، $x = 5$ حول محور السينات.

تمهيدي 2012 | تمهيدي 2019

الحل

$$y = 2x^2 \implies y^2 = 4x^4$$

$$V = \pi \int_0^5 4x^4\,dx = \pi \left[\frac{4}{5}x^5\right]_0^5 = \pi \cdot 4(625) = 2500\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 4: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيمين $y = 1$، $y = 2$ حول محور الصادات.

د 1 2012

الحل

$$y = x^2 + 1 \implies x^2 = y - 1$$

$$V = \pi \int_1^2 (y-1)\,dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^2 = \pi \left[(2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{\pi}{2}\ \text{unit}^3$$

السؤال 5: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sqrt{5}x^2$ والمستقيمين $x = 1$، $x = 2$ حول المحور السيني.

د 2 2012 د 3 2013

الحل

$$y = \sqrt{5}x^2 \implies y^2 = 5x^4$$

$$V = \pi \int_1^2 5x^4\,dx = \pi \left[x^5\right]_1^2 = \pi(32 - 1) = 31\pi\ \text{unit}^3$$

السؤال 6: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي.

د 1 2013 د 1 خارج القطر 2015 د 1 خارج القطر 2016

الحل

$$x^2 = y - 1$$

وعند $y = 1 \implies x = 0$.

$$V = \pi \int_1^4 (y-1)\,dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^4 = \pi \left[(8-4) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{9\pi}{2}\ \text{unit}^3$$

السؤال 7: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$، $x = 1$ حول المحور الصادي.

د 2 2013

الحل

$$y = \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{y} \implies x^2 = \frac{1}{y^2}$$

نجد حدود y: عند $x = 1 \implies y = 1$، وعند $x = \frac{1}{2} \implies y = 2$.

$$V = \pi \int_1^2 y^{-2}\, dy = \pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 = \pi \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\pi}{2} \text{ unit}^3$$

السؤال 8: جد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ حيث $1 \le y \le 3$ دورة كاملة حول محور الصادات.

د 1 أسئلة النازحين 2014

الحل

$$y = \frac{3}{x} \implies x = \frac{3}{y} \implies x^2 = \frac{9}{y^2}$$

$$V = \pi \int_1^3 9y^{-2}\, dy = \pi \left[-\frac{9}{y}\right]_1^3 = \pi(-3 + 9) = 6\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 9: احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمين $x = 0$، $x = 2$ حول المحور السيني.

د 2 2014 د 1 أسئلة الموصل 2017 د 2 2017

الحل

$$V = \pi \int_0^2 x^3\, dx = \pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 10: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $y = 1$، $y = 2$ حول المحور الصادي.

د 3 2015

الحل

$$x^2 = \frac{1}{y^2} \implies V = \pi \int_1^2 y^{-2}\, dy = \pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2} \text{ unit}^3$$

السؤال 11: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحني $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 0$، $y = 1$ حول المحور الصادي.

د 4 أسئلة النازحين 2015 د 1 خارج القطر 2017

الحل

$$y = 4x^2 \implies x^2 = \frac{y}{4}$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{y}{4}\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} \text{ unit}^3$$

السؤال 12: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة للقطع المكافئ الذي معادلته $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 0$، $y = 16$ حول المحور الصادي.

تمهيدي 2017

الحل

$$x^2 = \frac{y}{4} \implies V = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4}\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16} = \pi \cdot \frac{256}{8} = 32\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 13: جد الحجم الناتج من دوران الدائرة $x^2+y^2=9$ حول محور السينات ومركزها نقطة الأصل.

د 1 تطبيقي 2017

الحل

$$y^2=9-x^2$$

وعند تقاطعها مع محور السينات $y=0 \implies x=\pm 3$.

$$V=\pi\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx=\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}=\pi[(27-9)-(-27+9)]=36\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 14: جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بمنحني الدالة $x^2+y^2=81$ حول محور الصادات علماً أن المنحني يقطع محور الصادات.

د 3 تطبيقي 2017

الحل

$$x^2=81-y^2$$

وعند تقاطعها مع محور الصادات $y=\pm 9 \implies x=0$.

$$V=\pi\int_{-9}^{9}(81-y^2)\,dy=\pi\left[81y-\frac{y^3}{3}\right]_{-9}^{9}=\pi[(729-243)-(-729+243)]=972\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 15: احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=\sqrt{x^3}$ والمستقيمين $x=0$، $x=2$ حول محور السينات.

تمهيدي تطبيقي 2019 تمهيدي تطبيقي 2020

الحل

$$y=\sqrt{x^3} \implies y^2=x^3 \implies V=\pi\int_0^2 x^3\,dx=\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=4\pi \text{ unit}^3$$

السؤال 16: جد حجم المنطقة المحددة بين المنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ حيث $1 \leq y \leq 4$ إذا دارت حول محور الصادات.

تمهيدي 2025

الحل

$$x = \frac{1}{\sqrt{y}} \implies x^2 = \frac{1}{y}$$

$$V = \pi \int_1^4 \frac{1}{y}\, dy = \pi \left[\ln |y|\right]_1^4 = \pi(\ln 4 - \ln 1) = 2\pi \ln 2 \,\text{unit}^3$$