4 التكامل

نفهم الفكرة... ونحلّها خطوة خطوة.



بداية الرحلة

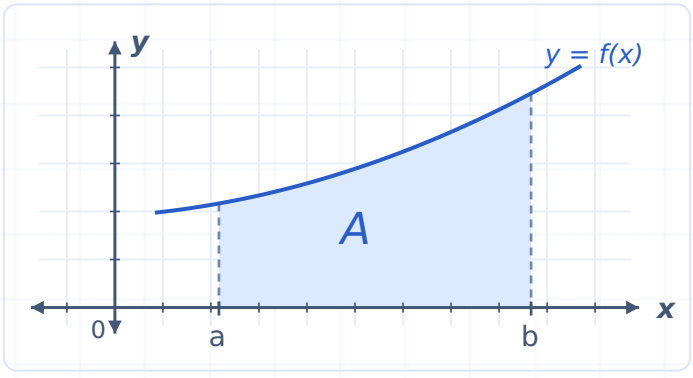
خطوة صغيرة بالفهم، خطوة كبيرة بالحل.

المناطق المحددة بمنحنيات

هناك مناطق مستوية يمكن إيجاد مساحتها مثل المستطيل، المثلث، شبه المنحرف، الدائرة .. إلخ. ولكن هناك أشكال تسمى مناطق مضلعة لا يمكن إيجاد مساحتها إلا بتقسيمها إلى مناطق مثلثة أو مربعة أو مستطيلة .... إلخ.

أما المنطقة A والتي تسمى منطقة تحت المنحني f وهي مجموعة النقاط المحصورة بين المنحني (بيان الدالة f) والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ (وردت في الأصل $y = b$) ومحور السينات فلا يمكن تقسيمها إلى مناطق معلومة (مثلث، مستطيل، دائرة .... إلخ).

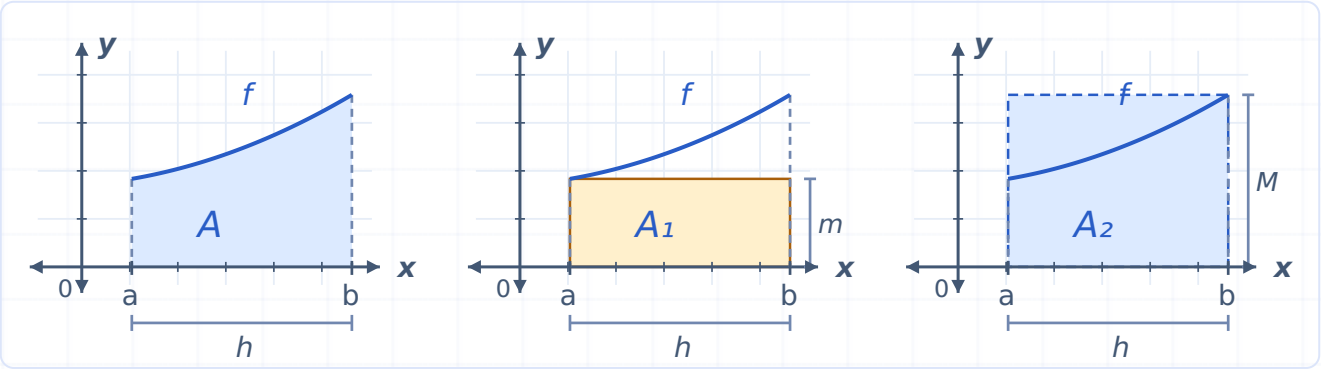
لذلك كيف يمكن حساب مساحتها؟



شكل توضيحي: المنطقة المحصورة بين المنحني f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ و $x = b$.

إيجاد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المستوية

إذا كانت f دالة (منحني) وكانت (A) المنطقة المحصورة بينها وبين الإحداثي السيني في الفترة $[a, b]$ كما هو مبين في الشكل أدناه، فيمكننا إيجاد مساحة المنطقة (A) المحددة بالرسم.



أشكال توضيحية: المنطقة A، والمستطيل الداخلي A_1 بارتفاع m، والمستطيل الخارجي A_2 بارتفاع M وعرض h.

ملاحظات:

1. نرسم مستطيلاً من أدنى نقطة في المنحني ضمن الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز (A_1).
2. نرسم مستطيلاً من أعلى نقطة في المنحني ضمن الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز (A_2).
3. نوجد مساحة المنطقتين المستطيلتين (A_1) و (A_2).
4. المطلوب هو حساب القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A بالاعتماد على القانون:

$$A \approx \frac{A_1 + A_2}{2}$$

5. مساحة أي منطقة هي عدد حقيقي غير سالب.
6. $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ ، مساحة $A_1 \leq$ مساحة $A \leq$ مساحة A_2.
7. نرمز لارتفاع المستطيل الصغير A_1 بالرمز m حيث $m = f(a)$.
8. نرمز لارتفاع المستطيل الكبير A_2 بالرمز M حيث $M = f(b)$.



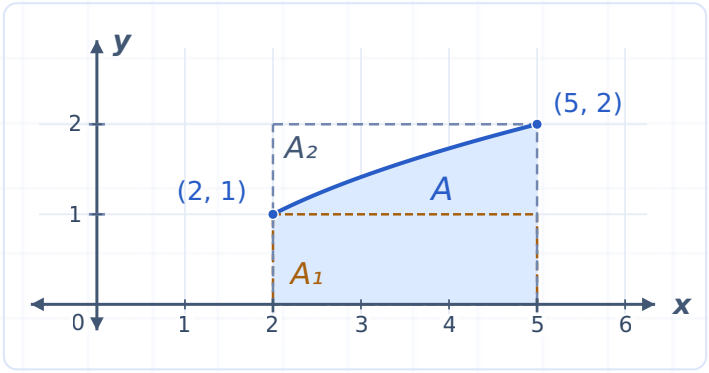
«جمال الرياضيات لا يتجلّى إلا لمن يصبر عليها.»

مريم ميرزاخاني
مقابلة مع معهد كلاي للرياضيات

مثال: أوجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A حيث:

$$A = \{(x,y),\ 2 \le x \le 5,\ 0 \le y \le f(x),\ f(x) = \sqrt{x-1}\}$$

الحل:



$h = 5 - 2 = 3$

$f(x) = \sqrt{x-1}$

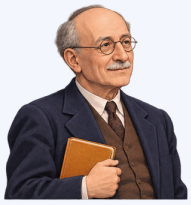
$m = f(2) = \sqrt{2-1} = 1$

$A_1 = m \cdot h = (1)(3) = 3$ (داخل المستطيل)

$M = f(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$

$A_2 = M \cdot h = 2(3) = 6$ (خارج المستطيل)

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$



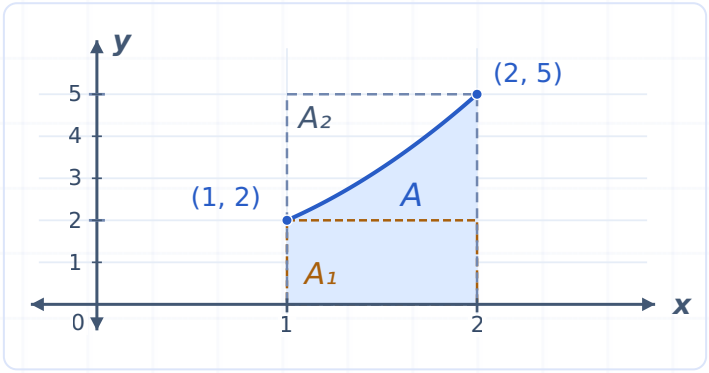
«إذا تعذّر عليك حلّ المسألة، فجرّب أولًا حلّ مسألة قريبة منها.»

جورج بوليا
كيف تحلّها؟

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث:

$$A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2,\ f(x) = x^2 + 1\}$$

الحل:



$$h = 2 - 1 = 1$$

$$m = f(1) = (1)^2 + 1 = 2$$

$$A_1 = m \cdot h = 2(1) = 2 \text{ unit}^2 \quad \text{(داخل المستطيل)}$$

$$M = f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

$$A_2 = M \cdot h = 5(1) = 5 \text{ unit}^2 \quad \text{(خارج المستطيل)}$$

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{2 + 5}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ unit}^2 \quad A \text{ المساحة التقريبية للمنطقة}$$

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3,\ f(x) = x^2 + 1\}$.

الحل:

$$h = 3 - 1 = 2$$

$$m = f(1) = (1)^2 + 1 = 2$$

$$A_1 = m \cdot h = 2(2) = 4 \text{ unit}^2$$

$$M = f(3) = (3)^2 + 1 = 10$$

$$A_2 = M \cdot h = 10(2) = 20 \text{ unit}^2$$

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{4 + 20}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ unit}^2 \quad A \text{ المساحة التقريبية للمنطقة}$$

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 5,\ f(x) = 3x^2 - 2\}$.

الحل:

$$h = 5 - 2 = 3$$

$$m = f(2) = 3(2)^2 - 2 = 10$$

$$A_1 = m \cdot h = 10(3) = 30 \text{ unit}^2$$

$$M = f(5) = 3(5)^2 - 2 = 73$$

$$A_2 = M \cdot h = 73(3) = 219 \text{ unit}^2$$

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{30 + 219}{2} = \frac{249}{2} = 124\frac{1}{2} \text{ unit}^2$$ A المساحة التقريبية للمنطقة

مساحة المنطقة المستوية بدقة أكبر

1. نجزئ الفترة المعطاة $[a,b]$ إلى فترات حسب الطلب وليكن عدد الفترات هو (n) وبذلك يكون طول الفترة:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

حيث يرمز للأعداد من $(1,2,\ldots,n)$ بالرمز σ (سكما) حيث أن $\sigma = (1,2,3,\ldots,n)$.

2. نحسب مساحة أكبر منطقة مستطيلة داخل A حيث تساوي $(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)$.
3. نحسب مساحة أصغر منطقة مستطيلة داخل A حيث تساوي $(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \cdots + \overline{A}_n)$.
4. نجد مساحة المنطقة A حسب القانون التالي:

$$A = \frac{\sum A_n + \sum A'_n}{N}$$

ونلاحظ أنه كلما زادت عدد نقاط التجزئة فإن المحصلة النهائية تقل وتصبح القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A أكثر دقة.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة $A = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 5,\ y = x^2 + 1\}$ وذلك باستخدام التجزئة:

1. $\sigma_1 = (2,3,5)$
2. $\sigma_2 = (2,3,4,5)$

الحل:

1) $\sigma_1(2,3,5) = [2,3] + [3,5]$

المستطيلات في الداخل:

$$m_1 = f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

$$m_2 = f(3) = (3)^2 + 1 = 10$$

$$A_1 + A_2 = (3-2)m_1 + (5-3)m_2$$

$$A_1 + A_2 = 1(5) + 2(10) = 5 + 20 = 25$$

المستطيلات في الخارج:

$$M_1 = f(3) = (3)^2 + 1 = 10$$

$$M_2 = f(5) = (5)^2 + 1 = 26$$

$$A'_1 + A'_2 = (3-2)M_1 + (5-3)M_2$$

$$A'_1 + A'_2 = (3-2)\cdot 10 + (5-3)\cdot 26 = 10 + 52 = 62$$

$$\therefore A = \frac{25+62}{2} = \frac{87}{2} = 43\frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

متابعة الحل

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة $A=\{(x,y):2\le x\le 5,\ y=x^2+1\}$ وذلك باستخدام التجزئة:

2) تجزأ الفترة $\sigma_2=(2,3,4,5)=[2,3]+[3,4]+[4,5]$

المستطيلات في الداخل:

$$m_1=f(2)=(2)^2+1=5$$

$$m_2=f(3)=(3)^2+1=10$$

$$m_3=f(4)=(4)^2+1=17$$

$$A_1+A_2+A_3=(3-2)m_1+(4-3)m_2+(5-4)m_3$$

$$A_1+A_2+A_3=1(5)+1(10)+1(17)=32\ \text{unit}^2$$

المستطيلات في الخارج:

$$M_1=f(3)=(3)^2+1=10$$

$$M_2=f(4)=(4)^2+1=17$$

$$M_3=f(5)=(5)^2+1=26$$

$$A'_1+A'_2+A'_3=(3-2)M_1+(4-3)M_2+(5-4)M_3$$

$$A'_1+A'_2+A'_3=1(10)+1(17)+1(26)=53\ \text{unit}^2$$

$$A=\frac{\sum A_n+\sum A'_n}{N}\Longrightarrow\therefore A=\frac{32+53}{2}=\frac{85}{2}=42\frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

واجب H.W

أوجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A باستخدام التجزئة:

$$A=\{(x,y):2\le x\le 5,\ y=x^2-3\}$$

a) $\sigma_1=(2,3,5)$

b) $\sigma_2=(2,3,4,5)$

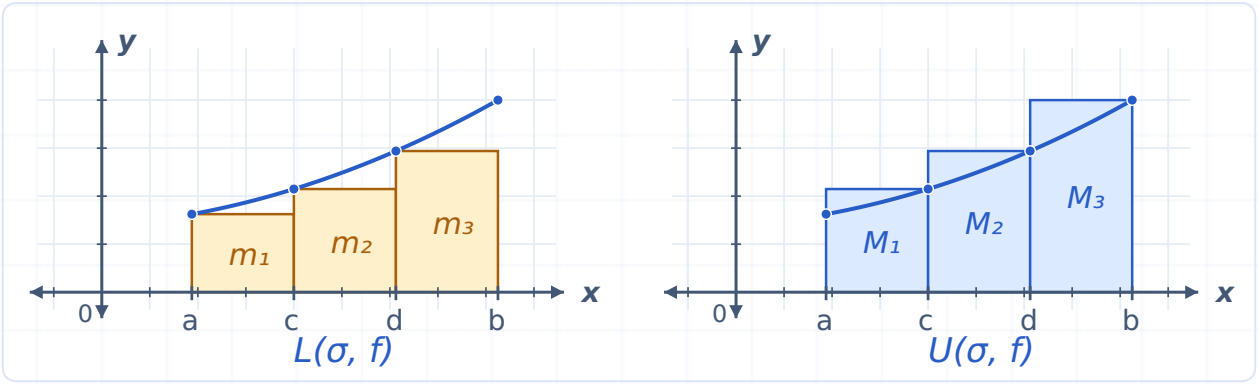
الجواب: a) $\frac{63}{2}$ ، b) $\frac{61}{2}$

المجاميع العليا والمجاميع السفلى

- يرمز للمجاميع العليا $U(\sigma, f)$
- يرمز للمجاميع السفلى $L(\sigma, f)$

$$U(\sigma, f) \geq L(\sigma, f)$$

- سنعتبر الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ مستمرة على الفترة $[a, b]$ حيث يمكن أن تكون الدالة متزايدة أو متناقصة أو تحتوي على نقطة حرجة.
- إذا كانت التجزيئات متساوية والدالة هي عبارة عن ثابت في هذه الحالة يتساوى المجموع الأعلى مع المجموع الأسفل.
- إذا أردنا استخراج m نعوض الرقم الأصغر لبداية الفترة وإذا أردنا استخراج M نعوض الرقم الأكبر الذي تنتهي به الفترة.
- في حالة احتواء الفترة الجزئية على نقطة حرجة نحسب قيم بداية الفترة ونهايتها وقيمة النقطة الحرجة وتكون القيمة الصغيرة هي m والقيمة الأكبر هي M.
- إذا لم نشترط أن تكون $f(x) \geq 0$ فإن من المتوقع ظهور المجموعة السفلى عدد موجب أو سالب أو صفر وبالمثل للمجموعة العليا.



شكل توضيحي لتجزئة الفترة $[a, b]$ إلى ثلاث فترات جزئية وحساب المجاميع العليا والسفلى.

مثال: لتكن $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 5 + 2x$ جد المجموع الأسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الأعلى $U(\sigma, f)$.

وزاري د 1 أسئلة النازحين 2014

نتبع ما يلي لحل هذه الأسئلة:

1. تجزأ الفترة (ويفضل أن تكون منتظمة).
2. نشتق الدالة ونساوي المشتقة للصفر فإذا كان الجواب عدداً ثابتاً فإذا كانت موجبة فالدالة متزايدة وإذا كانت سالبة فهي متناقصة، أما إذا حصلنا على قيمة (x) نستخدم الاختبار للإشارة (الطريقة السابقة) ونجد هل هي متزايدة أو متناقصة. وبطريقة أخرى نشتق المشتقة الثانية فإذا كان الناتج موجباً فإن النهاية تكون صغرى وعندها نكتب القيمة المؤجلة في m ثم نعوض طرفي الفترة المؤجلة ثم نختار أكبر الناتجين ليكون في حقل M، أما إذا كانت المشتقة الثانية سالبة فتكون النهاية عظمى محلية وعندها نكتب القيمة المؤجلة M ثم نعوض طرفي الفترة المؤجلة ونختار أصغر الناتجين ونضعه في حقل m.
3. نكتب الجدول وهو ثابت لا تتغير حقوله.
4. ننتبه إلى ما يلي: إذا كانت الدالة متزايدة فإنه m_i حيث m هي (أصغر قيمة للدالة) تأخذ $f(a)$ وكذلك للدالة المتزايدة فإن M_i حيث M هي (أكبر قيمة للدالة) تأخذ $f(b)$.

الحل:

$f : [1,4] \to \mathbb{R}$

$f(x) = 5 + 2x \implies f'(x) = 2 > 0$ الدالة متزايدة في مجالها

$h = \dfrac{b-a}{3} = \dfrac{4-1}{3} = 1$ ثلاث فترات $\implies \sigma = [1,2],[2,3],[3,4]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(1) = 5+2 = 7$	$M_1 = f(2) = 5+4 = 9$	7	9
$[2,3]$	1	$m_2 = f(2) = 5+4 = 9$	$M_2 = f(3) = 5+6 = 11$	9	11
$[3,4]$	1	$m_3 = f(3) = 5+6 = 11$	$M_3 = f(4) = 5+8 = 13$	11	13

$\therefore L(\sigma, f) = \sum(h_i)(m_i) = 7 + 9 + 11 = 27 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum(h_i)(M_i) = 9 + 11 + 13 = 33$

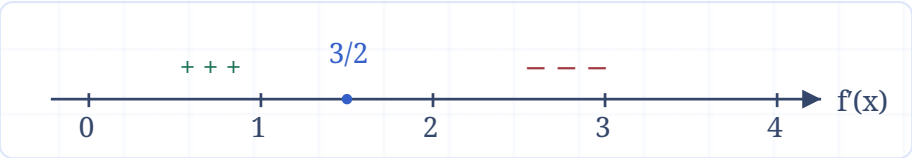
مثال: إذا كانت $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=3x-x^2$ أوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ ، مستخدماً أربعة تجزيئات منتظمة.

وزاري د 2 خارج القطر 2017 تمهيدي 2019

الحل:

$$\sigma=[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$$

$$f(x)=3x-x^2 \implies f'(x)=3-2x \implies 3-2x=0 \implies x=\frac{3}{2}\in[0,4]$$



أي أن العدد الحرج يوجد في الفترة $[1,2]$:

$$x=\frac{3}{2}\in[1,2] \implies \boxed{f(1)=2},\ \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}},\ \boxed{f(2)=2} \implies M=\frac{9}{4},\ m=2$$

ملاحظة: $\frac{3}{2}$ تقع ضمن الفترة $[1,2]$ لذلك نعوض $\frac{3}{2}$ بدل x ضمن فترتها، وعندما نصل إلى فترات التناقص نعوض لكل m_i بـ $f(b)$ وبدل M_i بـ $f(a)$.

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[0,1]$	1	$m_1=f(0)=0$	$M_1=f(1)=3-1=2$	0	2
$[1,2]$	1	$m_2=f(1)=3-1=2$	$M_2=f\left(\frac{3}{2}\right)=3\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$ (وردت في الأصل $\frac{9}{2}$)
$[2,3]$	1	$m_3=f(3)=3(3)-9=0$	$M_3=f(2)=6-4=2$	0	2
$[3,4]$	1	$m_4=f(4)=12-16=-4$	$M_4=f(3)=9-9=0$	-4	0

$$L(\sigma,f)=\sum(h_i)(m_i)=0+2+0+(-4)=-2 \quad , \quad U(\sigma,f)=\sum(h_i)(M_i)=2+\frac{9}{4}+2+0=6\frac{1}{4}$$

لاحظ أن: $L(\sigma,f)\le U(\sigma,f)$.

حل تمارين (1 - 4)

س1 / أوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ **لكل مما يأتي:**

1) $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=3-x$

a) $\sigma=(-2,0,1)$

وزاري 2012 د 1 خارج القطر

• b) تقسيم الفترة $[-2,1]$ إلى ثلاث فترات جزئية منتظمة.

الحل:

a) الفترات هي $[-2,0],[0,1]$

$f(x)=3-x \implies f'(x)=-1\neq 0$ لا توجد نقطة حرجة والدالة متناقصة

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[-2,0]$	2	$m_1=f(0)=3-0=3$	$M_1=f(-2)=3+2=5$	6	10
$[0,1]$	1	$m_2=f(1)=3-1=2$	$M_2=f(0)=3-0=3$	2	3

$$L(\sigma,f)=\sum(h_i)(m_i)=8 \quad , \quad U(\sigma,f)=\sum(h_i)(M_i)=13$$

ملاحظة: إذا طلب في السؤال إيجاد المساحة التقريبية A:

$$A=\frac{8+13}{2}=\frac{21}{2}=10.5 \text{ unit}^2$$

b) تقسم الفترة إلى ثلاث فترات جزئية منتظمة:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-(-2)}{3}=\frac{3}{3}=1$$

$\because f(x)=3-x \implies f'(x)=-1\neq 0$ لا توجد نقطة حرجة والدالة متناقصة

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[-2,-1]$	1	$m_1=f(-1)=3+1=4$	$M_1=f(-2)=3+2=5$	4	5
$[-1,0]$	1	$m_2=f(0)=3-0=3$	$M_2=f(-1)=3+1=4$	3	4
$[0,1]$	1	$m_3=f(1)=3-1=2$	$M_3=f(0)=3-0=3$	2	3

$$L(\sigma,f)=\sum(h_i)(m_i)=9 \quad , \quad U(\sigma,f)=\sum(h_i)(M_i)=12$$

س2 / إذا كان $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=4x-x^2$ ، $\sigma=(0,1,2,3,4)$

وزاري تمهيدي 2018

صيغة أخرى للسؤال

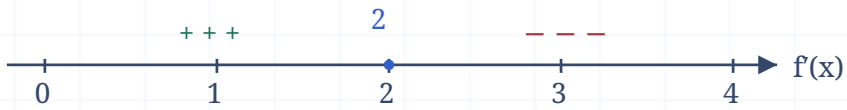
جد $L(\sigma,f)$ و $U(\sigma,f)$ للدالة $f(x)=4x-x^2$، حيث $f:[0,4]\to\mathbb{R}$، باستخدام أربع تجزيئات منتظمة.

الحل:

الفترات هي $[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$

$$f(x)=4x-x^2 \implies f'(x)=4-2x \implies 4-2x=0 \implies x=\frac{4}{2}=2\in[1,2]$$

∴ توجد نقطة حرجة هي $(2,4)$ وهي نهاية عظمى محلية ولا تجزئ الفترة.



الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[0,1]$	1	$m_1=f(0)=0$	$M_1=f(1)=4-1=3$	0	3
$[1,2]$	1	$m_2=f(1)=4(1)-1=3$	$M_2=f(2)=8-4=4$	3	4
$[2,3]$	1	$m_3=f(3)=12-9=3$	$M_3=f(2)=8-4=4$	3	4
$[3,4]$	1	$m_4=f(4)=16-16=0$	$M_4=f(3)=12-9=3$	0	3

$$L(\sigma,f)=\sum(h_i)(m_i)=6 \quad , \quad U(\sigma,f)=\sum(h_i)(M_i)=14$$

أحياناً يطلب في السؤال إيجاد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A وكما يلي: نقوم بحل السؤال كما هو أعلاه ثم يضاف إليه:

$$A_1=L(\sigma,f)=6 \quad , \quad A_2=U(\sigma,f)=14 \implies A=\frac{A_1+A_2}{2}=\frac{6+14}{2}=10$$

س3 / $f(x) = 3x^2 + 2x \text{ ، } f : [1,4] \to \mathbb{R}$

a) $\sigma = (1, 2, 4)$

• b) استخدم ثلاث تجزيئات متساوية.

الحل:

a) $\sigma = (1, 2, 4)$

الفترات: $[1,2], [2,4]$

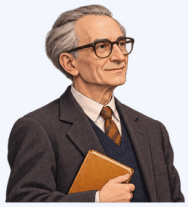
$$f(x) = 3x^2 + 2x \implies f'(x) = 6x + 2$$

$$f'(x) = 0 \implies 6x + 2 = 0 \implies 6x = -2 \implies x = -\frac{1}{3} \notin [1,4]$$

لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في الفترة $[1,4]$، وسوف يكون $m_i = f(a)$ ، $M_i = f(b)$.

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(1) = 5$	$M_1 = f(2) = 16$	5	16
$[2,4]$	2	$m_2 = f(2) = 16$	$M_2 = f(4) = 56$	32	112
المجموع				$L(\sigma, f) = 37$	$U(\sigma, f) = 128$

$$L(\sigma, f) = \sum(h_i)(m_i) = 37 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum(h_i)(M_i) = 128$$



«الطريقة الوحيدة لتعلّم الرياضيات هي ممارستها.»

بول هالموس

كتاب مسائل فضاء هيلبرت

متابعة الحل

س3 / $f(x) = 3x^2 + 2x$ ، $f : [1,4] \to \mathbb{R}$

b) $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1$

الفترات هي: $[1,2], [2,3], [3,4]$

$$f(x) = 3x^2 + 2x \implies f'(x) = 6x + 2$$

$$f'(x) = 0 \implies 6x + 2 = 0 \implies 6x = -2 \implies x = -\frac{1}{3} \notin [1,4]$$

لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة على الفترة $[1,4]$.

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(1) = 5$	$M_1 = f(2) = 16$	5	16
$[2,3]$	1	$m_2 = f(2) = 16$	$M_2 = f(3) = 33$	16	33
$[3,4]$	1	$m_3 = f(3) = 33$	$M_3 = f(4) = 56$	33	56
المجموع				$L(\sigma, f) = 54$	$U(\sigma, f) = 105$

$$L(\sigma, f) = \sum (h_i)(m_i) = 54 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum (h_i)(M_i) = 105$$

تعريف التكامل

إذا كانت $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد k بحيث لأي تجزئة (σ) في الفترة $[a,b]$ فإن:

$$L(\sigma, f) \leq K \leq U(\sigma, f)$$

نسمي العدد K **التكامل المحدد** للدالة (f) على الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ ويُقرأ التكامل من a إلى b للدالة (f) ونسمي a, b حدي التكامل.

ملاحظات:

1. إذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإن $\left\{L(\sigma, f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(\sigma, f)\right\}$ وتكون القيمة التقريبية لهذا التكامل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$$

2. إذا كانت الدالة $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يعطي مساحة المنطقة A تحت المنحني f وهو عدد غير سالب، dx تشير إلى أن حدي التكامل، أما a, b قيمتان للمتغير x.

3. إذا كانت الدالة $f(x) \le 0,\ \forall x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$ وهذا لا يدل على المساحة، أما مساحة المنطقة A فهي ستساوي:

$$-\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

4. أن قيمة $\int_a^b f(x)\,dx$ تتوقف على الفترة $[a,b]$ وعلى قيمة $f(x)$.

مثال: لتكن $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = x^2$ ، أوجد قيمة تقريبية للتكامل إذا جزئت الفترة $[1,3]$ إلى تجزئتين.

وزاري 2016 د 2 خارج القطر 2017 د 1 2019 د 2

الحل:

الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$ لأنها كثيرة حدود.

$$\because f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x \implies 2x = 0 \implies x = 0 \notin [1,3]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = 1 \implies \sigma = (1,2,3), \quad [1,2],[2,3]$$

$\therefore$ الدالة متزايدة على الفترة $[1,3]$.

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(1) = 1$	$M_1 = f(2) = 4$	1	4
$[2,3]$	1	$m_2 = f(2) = 4$	$M_2 = f(3) = 9$	4	9
المجموع				$L(\sigma,f) = 5$	$U(\sigma,f) = 13$

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ unit}^2$$

مثال: لتكن $f : [2,5] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 2x - 3$ ، أوجد $\int_2^5 f(x)\,dx$.

جزء من السؤال الوزاري 2017 د 3

الحل:

الدالة مستمرة في مجالها لأنها كثيرة حدود.

$$f(x) = 2x - 3 \implies f'(x) = 2 \neq 0$$

$$\sigma = (2,3,5) \implies \sigma = [2,3],[3,5]$$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[2,3]$	1	$m_1 = f(2) = 4 - 3 = 1$	$M_1 = f(3) = 3$	1	3
$[3,5]$	2	$m_2 = f(3) = 6 - 3 = 3$	$M_2 = f(5) = 7$	6	14
المجموع				$L(\sigma, f) = 7$	$U(\sigma, f) = 17$

$$\int_2^5 (2x - 3)\,dx = \frac{7 + 17}{2} = 12 \text{ unit}^2$$

ملاحظة: في التكامل إذا لم يذكر عدد التجزئة يمكن أخذ تجزئة منتظمة. **ملاحظة:** في الدالة الثابتة يكون $m_i = M_i$ لكل الفترات ويكون $L(\sigma, f) = U(\sigma, f)$ لكل فترة جزئية ولكل تجزئة.

مثال: لتكن $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3$ ، أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 f(x)\,dx$.

جزء من السؤال الوزاري تمهيدي 2017

الحل:

الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ لأنها كثيرة حدود.

$$f(x) = 3 \implies f'(x) = 0$$

$$\sigma = (1,3,5) \implies \sigma = [1,3],[3,5]$$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,3]$	2	$m_1 = f(1) = 3$	$M_1 = f(3) = 3$	6	6
$[3,5]$	2	$m_2 = f(3) = 3$	$M_2 = f(5) = 3$	6	6
المجموع				$L(\sigma, f) = 12$	$U(\sigma, f) = 12$

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{12 + 12}{2} = 12 \text{ unit}^2$$

حل تمارين (2 - 4)

س1: أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$.

وزاري د 1 خارج القطر 2011 د 2 تطبيقي 2018

الحل:

الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$.

$$\because f(x) = \frac{3}{x} \implies f'(x) = \frac{-3}{x^2} \implies 0 = \frac{-3}{x^2} \implies -3 \neq 0$$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(2) = \frac{3}{2}$	$M_1 = f(1) = 3$	$\frac{3}{2}$	3
$[2,3]$	1	$m_2 = f(3) = 1$	$M_2 = f(2) = \frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

$$L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 1 + \frac{3}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$



«الجبر هندسة مكتوبة، والهندسة جبر مرسوم.»

صوفي جيرمان
الأعمال الفلسفية

س2: لتكن $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=3x-3$ أوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(1,2,3,4)$ ثم تحقق هندسياً بحساب المنطقة تحت المنحني للدالة f.

وزاري تمهيدي خارج القطر 2014 د1 2018

الحل:

الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,4]$ لأنها كثيرة حدود.

$\because f(x)=3x-3 \implies f'(x)=3>0$ لا توجد نقطة حرجة والدالة متزايدة

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[1,2]$	1	$m_1=f(1)=0$	$M_1=f(2)=3$	0	3
$[2,3]$	1	$m_2=f(2)=3$	$M_2=f(3)=6$	3	6
$[3,4]$	1	$m_3=f(3)=6$	$M_3=f(4)=9$	6	9

$$\therefore L(\sigma,f)=\sum h_im_i=9 \quad , \quad U(\sigma,f)=\sum h_iM_i=18$$

$$\int_1^4 (3x-3)\,dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\frac{9+18}{2}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$$

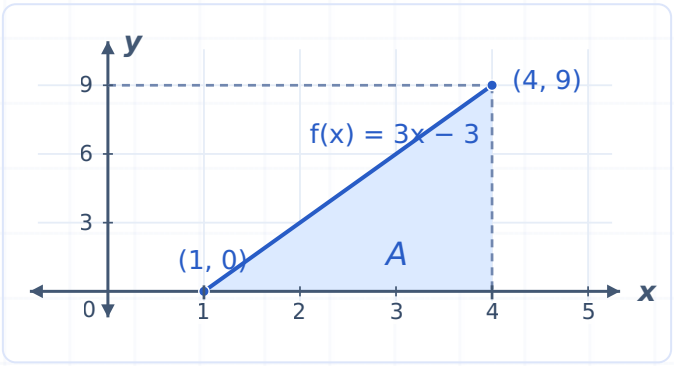
الحل الهندسي:

$f(1)=3-3=0 \implies (1,0)$

$f(4)=12-3=9 \implies (4,9)$

مساحة $A=\frac{1}{2}$(الارتفاع × القاعدة)

مساحة $A=\frac{1}{2}((4-1)\times 9)=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$



شكل هندسي: مثلث قائم الزاوية يمثل المنطقة تحت المستقيم $f(x)=3x-3$ على الفترة $[1,4]$.

س3: أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_2^4 (3x^2 - 3)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2, 3, 4)$.

وزاري د 1 أسئلة النازحين 2015 د 3 2015 د 2 2024

الحل:

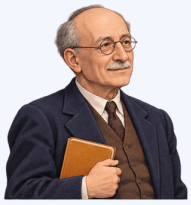
الفترات $[2, 3], [3, 4]$

$\because f(x) = 3x^2 - 3 \implies f'(x) = 6x \implies 6x = 0 \implies x = 0 \notin [2, 4]$ الدالة متزايدة

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[2, 3]$	1	$m_1 = f(2) = 9$	$M_1 = f(3) = 24$	9	24
$[3, 4]$	1	$m_2 = f(3) = 24$	$M_2 = f(4) = 45$	24	45

$$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = 33 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 69$$

$$\int_2^4 (3x^2 - 3)\,dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{33 + 69}{2} = \frac{102}{2} = 51$$



«هل يمكنك الوصول إلى النتيجة بطريقة أخرى؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

س4: أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ حيث أن $f(x) = -4$.

الحل:

الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-3, 2]$ لأنها كثيرة حدود.

$$\because f(x) = -4 \implies f'(x) = 0$$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[-3, 0]$	3	$m_1 = f(-3) = -4$	$M_1 = f(0) = -4$	-12	-12
$[0, 2]$	2	$m_2 = f(0) = -4$	$M_2 = f(2) = -4$	-8	-8

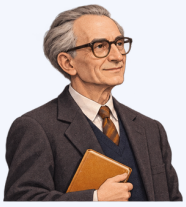
$$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = -20 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = -20$$

أو تُحل حسب التجزيئات التالية:

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[-3, -1]$	2	$m_1 = f(-3) = -4$	$M_1 = f(-1) = -4$	-8 (وردت في -12 الأصل)	-8 (وردت في -12 الأصل)
$[-1, 2]$	3	$m_2 = f(-1) = -4$	$M_2 = f(2) = -4$	-12 (وردت في -8 الأصل)	-12 (وردت في -8 الأصل)

$$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = -20 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = -20$$

$$\int_{-3}^{2} (-4)\,dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{-20 - 20}{2} = \frac{-40}{2} = -20$$



«اطرح أسئلتك، وابحث عن أمثلتك الخاصة، واكتشف براهينك بنفسك.»

بول هالموس

أريد أن أكون عالم رياضيات

س5: أوجد قيمة التكامل $\int_1^5 x^3\,dx$ باستخدام أربعة تجزيئات ممكنة.

وزاري د 1 خارج القطر 2014

الحل:

$\because f(x)=x^3 \implies f'(x)=3x^2 \implies 3x^2>0$ لا توجد نقطة حرجة والدالة متزايدة

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

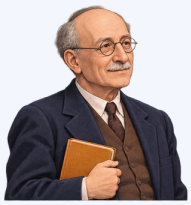
الفترات: $[1,2],[2,3],[3,4],[4,5]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[1,2]$	1	$m_1=f(1)=1$	$M_1=f(2)=8$	1	8
$[2,3]$	1	$m_2=f(2)=8$	$M_2=f(3)=27$	8	27
$[3,4]$	1	$m_3=f(3)=27$	$M_3=f(4)=64$	27	64
$[4,5]$	1	$m_4=f(4)=64$	$M_4=f(5)=125$	64	125

$$\therefore L(\sigma,f)=\sum h_im_i=100 \quad , \quad U(\sigma,f)=\sum h_iM_i=224$$

$$\int_1^5 x^3\,dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\frac{100+224}{2}=\frac{324}{2}=162$$

(وردت الدالة داخل التكامل (-4) سهواً في الأصل والصحيح x^3).



«ارسم شكلًا، واختر رموزًا مناسبة.»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

أمثلة إضافية محلولة

مثال: لتكن $f(x)=3x^2-4x$ ولتكن $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ أوجد قيمة تقريبية للتكامل باستخدام التجزئة $\sigma=(0,1,2,3)$ أو باستخدام ثلاث تجزئات متساوية.

الحل:

$$\because f(x)=3x^2-4x \implies f'(x)=6x-4 \implies 6x=4 \implies x=\frac{2}{3}\in[0,1]$$

if $x=\frac{2}{3} \implies \boxed{f(0)=0}, \boxed{f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}}, \boxed{f(1)=-1} \implies$

$\boxed{m_i=-\frac{4}{3}}$ (أصغر قيمة), $\boxed{M_i=0}$ (أكبر قيمة)

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-0}{3}=\frac{3}{3}=1$$

الفترات: $[0,1],[1,2],[2,3]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[0,1]$	1	$m_1=f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$	$M_1=f(0)=0$	$L_1=(1)\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}$	$U_1=(1)(0)=0$
$[1,2]$	1	$m_2=f(1)=-1$	$M_2=f(2)=4$	$L_2=(1)(-1)=-1$	$U_2=(1)(4)=4$
$[2,3]$	1	$m_3=f(2)=4$	$M_3=f(3)=15$	$L_3=(1)(4)=4$	$U_3=(1)(15)=15$

$$\therefore L(\sigma,f)=\sum h_im_i=-\frac{4}{3}-1+4=\frac{5}{3} \quad , \quad U(\sigma,f)=\sum h_iM_i=0+4+15=19$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\frac{\frac{5}{3}+19}{2}=\frac{\left(\frac{5+57}{3}\right)}{2}=\frac{\left(\frac{62}{3}\right)}{2}=\frac{62}{3}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{3}$$

النظرية الأساسية للتكامل

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث:

$$F'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a,b)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

حيث تسمى F **الدالة المقابلة** للدالة f على الفترة $[a,b]$.

مثال: إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي $F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ ، $F(x) = \sin x$ فأوجد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

وزاري 2017 د 2 خارج القطر

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال: إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1, 5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد قيمة $\int_1^5 f(x)\,dx$.

الحل:

$$\int_1^5 f(x)\,dx = F(5) - F(1) = 3(5)^2 - 3(1)^2 = 75 - 3 = 72$$

مثال: أثبت فيما إذا كانت $F(x) = x^3 + 2$ ، $F : [1, 3] \to \mathbb{R}$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$.

الحل:

$\because F(x) = x^3 + 2$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها كثيرة حدود. $\therefore F$ مستمرة على $[1, 3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1, 3)$.

$$\because F'(x) = 3x^2 = f(x) \quad \forall x \in (1, 3)$$

$\therefore F$ دالة مقابلة للدالة f على $[1, 3]$.



«كلّما قضيت وقتًا أطول مع الرياضيات، ازددت حماسًا لها.»

مريم ميرزاخاني
مقابلة مع معهد كلاي للرياضيات

مثال: أثبت أن الدالة $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ هي دالة مقابلة للدالة $f:\mathbb{R}\to$ ، $f(x)=\cos 2x$ على $\mathbb{R}$ ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$.

وزاري تمهيدي 2020 د 2 2020

الحل:

$$f(x)=\cos 2x \quad , \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

وهي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ أيضاً.

$$F'(x)=\frac{1}{2}(\cos 2x)\cdot 2=\cos 2x=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f.

$$\because \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\sin 2(0)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)=\frac{1}{2}$$



«الرياضيات فنّ إعطاء الاسم نفسه لأشياء مختلفة.»

هنري بوانكاريه

العلم والمنهج

الجدول التالي يوضح العلاقة بين f والدالة المقابلة لها F

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(x)$
a	ax
$x^n\ ,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n\ ,\ n \neq -1$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n \cdot f'(x)\ ,\ n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$
$\sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$\csc^2(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cot(ax+b)$
$\sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a}\sec ax$
$\csc ax \cot ax$	$\frac{-1}{a}\csc ax$

لذا نستنتج أن $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ حيث أن c ثابت حقيقي.

ملاحظة: أي نضيف إلى الأس واحد ونقسم على الأس الجديد:

$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

مثال: أوجد $\int_1^3 x^3\,dx$

الحل:

$$\int_1^3 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

مثال: أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \, dx$

وزاري تمهيدي تطبيقي 2021 د 1 تطبيقي 2021

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \, dx = [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sec \frac{\pi}{3} - \sec 0 = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

مثال: أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\cot \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{4}\right] = -[0 - 1] = 1$$

مثال: أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$

وزاري تمهيدي تطبيقي 2019

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال: أوجد $\int_1^2 x^2 \, dx$

الحل:

$$\int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

خواص التكامل المحدد

1) إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$$

- $\int_{-1}^2 x^2 \, dx \geq 0$ لأن $f(x) = x^2 \geq 0, \ \forall x \in [-1,2]$
- $\int_{-2}^3 3 \, dx > 0$ لأن $f(x) = 3 > 0, \ \forall x \in [-2,3]$
- $\int_2^3 (x+1) \, dx > 0$ لأن $f(x) = (x+1) > 0, \ \forall x \in [2,3]$

2) إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $f(x) \leq 0, \ \forall x \in [a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le 0$$

فمثلاً:

- $f(x) < 0,\ \forall x \in [1,2]$ لأن $\int_1^2 (-2)\,dx < 0$
- $f(x) < 0,\ \forall x \in [-2,-1]$ لأن $\int_{-2}^{-1} x\,dx < 0$

3) الثابت (العدد) يستخرج خارج التكامل: إذا f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، $\forall x \in [a,b]$ ، وكان c عدد حقيقي ثابتاً فإن:

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: إذا كان $\int_2^5 f(x)\,dx = 8$ فأوجد $\int_2^5 5\,f(x)\,dx$.

الحل:

$$\int_2^5 5\,f(x)\,dx = 5\int_2^5 f(x)\,dx = 5 \times 8 = 40$$

4) إذا كانت دالتان f_1, f_2 مستمرتين على الفترة $[a,b]$:

$$\int_a^b (f_1 \mp f_2)\,dx = \int_a^b f_1\,dx \mp \int_a^b f_2\,dx$$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع أي عدد محدد من الدوال المستمرة على فترة $[a,b]$.

مثال: إذا كانت $\int_1^3 f_1(x)\,dx = 15$ ، $\int_1^3 f_2(x)\,dx = 17$ فأوجد كلاً من:

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))\,dx \quad , \quad \int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

الحل:

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_1^3 f_1(x)\,dx + \int_1^3 f_2(x)\,dx = 15 + 17 = 32$$

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))\,dx = \int_1^3 f_1(x)\,dx - \int_1^3 f_2(x)\,dx = 15 - 17 = -2$$

مثال: إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$.

الحل:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx = \int_1^2 3x^2\,dx + \int_1^2 2x\,dx$$

$$= \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{2x^2}{2}\right]_1^2 = [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = [8-1] + [4-1] = 7 + 3 = 10$$

5) إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: إذا كانت $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ ، $\int_3^7 f(x)\,dx = 8$ فأوجد $\int_1^7 f(x)\,dx$.

الحل:

$$\int_1^7 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^7 f(x)\,dx = 5 + 8 = 13$$

مثال: لتكن $f(x) = |x|$ أوجد $\int_{-3}^4 f(x)\,dx$.

وزاري 2011 د 1

صيغة أخرى للسؤال

جد قيمة التكامل: $\int_{-3}^4 |x|\,dx$.

الحل:

f دالة مستمرة على $[-3,4]$ ولها قاعدتان هما:

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^4 f(x)\,dx = \int_{-3}^0 (-x)\,dx + \int_0^4 x\,dx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \left[0 - \left(\frac{-9}{2}\right)\right] + \left[\frac{16}{2} - 0\right] = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

مثال: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \forall x\geq 1\\ 3 & \forall x<1\end{cases}$ فأوجد $\int_0^5 f(x)\,dx$.

وزاري تمهيدي أحيائي 2023

الحل:

الدالة f مستمرة على الفترة $[0,5]$ وذلك لأنها مستمرة عند $x=1$ لأن:

1. $f(1)=2(1)+1=3$ (معرفة)
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3=L_1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}3=3=L_2\end{cases}$ $\therefore L_1=L_2$ (الغاية موجودة)
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ موجودة $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=3$

$\therefore$ الدالة f مستمرة على $\{x:x<1\},\{x:x>1\}$، إذن الدالة f مستمرة على الفترة $[0,5]$.

$$\therefore \int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^5 f(x)\,dx=\int_0^1 3\,dx+\int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$=[3x]_0^1+[x^2+x]_1^5=[3-0]+[30-2]=3+28=31$$

---

6) إذا كان:

1. $\int_a^a f(x)\,dx=0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

مثال: أوجد $\int_3^3 x\,dx$

الحل:

$$\int_3^3 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^3=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=0 \quad \text{أو باستخدام القاعدة مباشرة } \int_3^3 x\,dx=0$$

مثال: أوجد $\int_3^2 3x^2\,dx$

الحل:

$$\int_3^2 3x^2\,dx=-\int_2^3 3x^2\,dx=-[x^3]_2^3=-[27-8]=-27+8=-19$$

مثال: لتكن $f(x) = |x-2|$ أوجد $\int_0^4 f(x)\,dx$.

الحل:

ملاحظة: نحلّ المتباينة $x-2 \geq 0$ فنحصل على $x \geq 2$. ضمن $[0,4]$ نكتب $|x-2| = x-2$ على $[2,4]$، و $|x-2| = 2-x$ على $[0,2)$. نقسّم التكامل عند 2، حيث تعطي الصيغتان صفرًا.

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

1. $f(2) = |2-2| = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to 2} -(x-2) = 0 = L_2 \end{cases}$ $L_1 = L_2$ (الغاية موجودة)
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0$

∴ الدالة f مستمرة على كل من $\{x : x > 2\}, \{x : x < 2\}$، فالدالة f مستمرة على الفترة $[0,4]$.

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4$$

$$= \left[\frac{-4}{2} + 4\right] - [0] + \left[\frac{16}{2} - 8\right] - \left[\frac{4}{2} - 4\right]$$

$$= [-2+4] + [2] = 4$$

مثال: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 2\\ x+2 & x<2\end{cases}$ أوجد $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

الحل:

الدالة مستمرة في $\mathbb{R}$ لأنها مستمرة عند $x=2$:

1. $f(2)=4$
2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2} x^2=4=L_1\\ \lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4=L_2\end{cases}$
3. $L_1=L_2$ (الغاية موجودة) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=4$

∴ الدالة مستمرة. ∵ الفترة $[-1,1]$ تنتمي إلى الفترة $x<2$ فقط، ∴ يكون التكامل على $f(x)=x+2$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x+2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{2}+2\right]-\left[\frac{1}{2}-2\right]=4$$

مثال: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x & x\geq 1\\ 6x-1 & x<1\end{cases}$ أوجد $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

الحل:

الدالة f مستمرة على الفترة $[-2,3]$ لأنها مستمرة عند $x=1$ لأن:

1. $f(1)=3(1)^2+2(1)=5$ (معرفة)
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(3x^2+2x)=5=L_1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(6x-1)=5=L_2\end{cases}$ $L_1=L_2$ (الغاية موجودة)
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=5$ (سهواً في الأصل $x\to 2$ وردت)

∴ الدالة f مستمرة على كل $\{x: x>1\}, \{x: x<1\}$، إذن الدالة f مستمرة على كل $[-2,3]$.

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1}(6x-1)\,dx+\int_{1}^{3}(3x^2+2x)\,dx$$

$$=[3x^2-x]_{-2}^{1}+[x^3+x^2]_{1}^{3}=[2-14]+[36-2]=-12+34=22$$

حل تمارين (3 - 4)

س1: أحسب كلاً من التكاملات الآتية:

الحل

a)

$$\int_{-2}^{2}(3x-2)\,dx=\left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\left[\frac{3(2)^2}{2}-2(2)\right]-\left[\frac{3(-2)^2}{2}-2(-2)\right]$$

$$=[6-4]-[6+4]=2-10=-8$$

b)

$$\int_{1}^{2}(x^{-2}+2x+1)\,dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}+x^2+x\right]_{1}^{2}$$

$$=\left[\frac{-1}{2}+2^2+2\right]-\left[\frac{-1}{1}+1^2+1\right]$$

$$=\left[\frac{-1}{2}+6\right]-[-1+1+1]=\left[\frac{-1}{2}+6\right]-[1]=\frac{9}{2}$$

c)

$$\int_{1}^{3}(x^4+4x)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}+2x^2\right]_{1}^{3}$$

$$=\left[\frac{(3)^5}{5}+2(3)^2\right]-\left[\frac{1}{5}+2(1)^2\right]$$

$$=\left[\frac{243}{5}+18\right]-\left[\frac{1}{5}+2\right]=\frac{242}{5}+16=\frac{322}{5}$$

متابعة الحل

س1: أحسب كلاً من التكاملات الآتية:

d) $\int_0^2 |x-1|\,dx$

وزاري د 2 2017 د 2 أحيائي 2023

$$\because |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \left[\frac{-1}{2}+1\right] - [0] + \left[\frac{4}{2}-2\right] - \left[\frac{1}{2}-1\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

e)

وزاري د 1 أحيائي 2023

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x+\cos x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \left[\frac{(0)^2}{2} + \sin 0\right] - \left[\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= [0] - \left[\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right] = -\left[\frac{\pi^2}{8} - 1\right] = -\frac{\pi^2}{8} + 1$$

ملاحظة: $\sin(-x) = -\sin x$ ، $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

متابعة الحل

س1: أحسب كلاً من التكاملات الآتية:

f)

وزاري د 4 أسئلة النازحين 2015 تمهيدي 2018 تمهيدي أحيائي 2023

$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$$

$$= -\int_2^3 (x^2+x+1)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

$$= -\left[\left[\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+3\right]-\left[\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right]\right] = -\left[\left[\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+3\right]-\left[\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\right]\right]$$

$$= -\left(\frac{54+27+18-16-12-12}{6}\right) = -\frac{59}{6}$$

g)

وزاري تمهيدي تطبيقي 2020 د 2 تطبيقي 2020

$$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{2x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)dx = \int_1^3 (2x-4+5x^{-2})\,dx$$

$$= \left[x^2-4x+\frac{5x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$= \left[9-12-\frac{5}{3}\right]-[1-4-5] = \left[-3-\frac{5}{3}\right]-[-8] = -\frac{14}{3}+8 = \frac{10}{3}$$

س2: أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث $F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\to\mathbb{R}$ و $F(x)=\sin x+x$ حيث $f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=1+\cos x$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$.

وزاري د1 2020 | تمهيدي تطبيقي 2021 | تمهيدي 2025

الحل:

لكي نثبت أن $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$:

$$F(x)=\sin x+x$$

$$F'(x)=\cos x+1$$

$$F'(x)=\cos x+1=f(x)$$

$\therefore$ الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-[\sin 0+0]=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{3+\pi}{6}$$

نثبت أن $F(x)$ مستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$:

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}[\sin x+x]=\sin a+a\quad,\quad\forall a\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$$

$$F(a)=\sin a+a$$

$$\lim_{x\to a}F(x)=F(a)\implies\therefore F(x)\text{ مستمرة في مجالها}$$

س3: أوجد كل من التكاملات التالية:

الحل

a)

$$\int_1^4(x-2)(x+1)^2\,dx=\int_1^4(x-2)(x^2+2x+1)\,dx$$

$$=\int_1^4(x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)\,dx=\int_1^4(x^3-3x-2)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^4=\left[\frac{4^4}{4}-\frac{3}{2}(16)-8\right]-\left[\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2\right]$$

$$=[64-24-8]-\left[\frac{1-6-8}{4}\right]=\left[32+\frac{13}{4}\right]=\frac{128+13}{4}=\frac{141}{4}$$

متابعة الحل

س3: أوجد كل من التكاملات التالية:

b) $\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \text{ (خارج الفترة)} \end{cases}$$

لذا في هذه الحالة نأخذ الجزء الموجب فقط:

$$\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx = \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2}+1\right] - \left[\frac{1}{2}-1\right] = 1+1 = 2$$

c)

$$\int_{2}^{3} \frac{x^4-1}{x-1}\,dx = \int_{2}^{3} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}\,dx = \int_{2}^{3} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}\,dx$$

$$= \int_{2}^{3} (x+1)(x^2+1)\,dx = \int_{2}^{3} (x^3+x+x^2+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x\right]_{2}^{3} = \left[\frac{3^4}{4} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} + 3\right] - \left[\frac{16}{4} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + 2\right]$$

$$= \left[\frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 12\right] - \left[8 + \frac{32}{3}\right] = \frac{243+54+144-96-128}{12} = \frac{217}{12}$$

d)

وزاري د 2 أسئلة الموصل 2017

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\,dx = \int_{0}^{1} \sqrt{x}(x+4\sqrt{x}+4)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} (x\sqrt{x}+4x+4\sqrt{x})\,dx = \int_{0}^{1} \left(x(x)^{\frac{1}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left(x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^2}{2} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right] - [0] = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

س4: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & \forall x\geq 3\\ 6 & \forall x<3\end{cases}$ فأوجد $\int_1^4 f(x)\,dx$.

وزاري د 2 خارج القطر 2016

الحل:

نبرهن أن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[1,4]$:

1. $f(3)=2(3)=6$ (الدالة معرفة)
2. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3} 2x=6=L_1\\ \lim\limits_{x\to 3} 6=6=L_2\end{cases}$ $L_1=L_2$ (الغاية موجودة)
3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=6 \implies \therefore$ الدالة مستمرة.

$$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx=\int_1^3 6\,dx+\int_3^4 2x\,dx$$

$$=[6x]_1^3+[x^2]_3^4=[18-6]+[16-9]=12+7=19$$

س5: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \forall x\geq 0\\ 2x & \forall x<0\end{cases}$ فأوجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$.

وزاري د 1 2014 د 1 خارج القطر 2016

الحل:

نبرهن أن الدالة مستمرة على الفترة $[-1,3]$ وذلك بإثبات أنها مستمرة عند $x=0$:

1. $f(0)=3(0)^2=0$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} 3x^2=3(0)^2=0=L_1\\ \lim\limits_{x\to 0} 2x=2(0)=0=L_2\end{cases}$ $L_1=L_2$ (الغاية موجودة)
3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 2x\,dx+\int_0^3 3x^2\,dx=[x^2]_{-1}^0+[x^3]_0^3=[0-1]+[27-0]=-1+27=26$$

التكامل غير المحدد

إذا كانت للدالة f المستمرة على الفترة $[a,b]$ دالة مقابلة F فإنه يوجد عدد لا نهائي من الدوال المقابلة للدالة f وكل منها يساوي $F+C$ حيث C يمثل عدد ثابت والفرق بين أكثر من اثنين منها يساوي عدد ثابت.

- تسمى مجموعة الدوال المقابلة $F + C$ بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على الفترة $[a, b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$ إذا كان رمز متغير الدالة هو x.
- يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد على صورة:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

- عملية التكامل غير المحدد هي العملية المعاكسة لعملية التفاضل أي أحداهما تنهي دور الأخرى.

مثال: أوجد تكامل الدوال الآتية:

الحل:

(a) $\int (3x^2 + 2x + 1)\,dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + c = x^3 + x^2 + x + c$

(b) $\int (\cos x + x^{-2})\,dx = \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \sin x - x^{-1} + c = \sin x - \frac{1}{x} + c$

(c) $\int (x + \sec x \tan x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \sec x + c$

(d) $\int \sin(2x + 4)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x + 4)\,\underbrace{(2)}_{\text{المشتقة للزاوية}}\,dx = \frac{-1}{2}\cos(2x + 4) + c$

(e) $\int (\csc 3x \cot 3x)\,dx = \frac{1}{3}\int (3)(\csc 3x \cot 3x)\,dx = -\frac{\csc 3x}{3} + c$

(f) $\int (\sin ax + \sec^2 3x)\,dx = \int \frac{1}{a}\sin ax \cdot a\,dx + \int \frac{1}{3}\sec^2 3x \cdot \underbrace{(3)}_{\text{المشتقة للزاوية}}\,dx =$

$$\frac{-\cos ax}{a} + \frac{\tan 3x}{3} + c$$

نلاحظ أن كل قوس مرفوع إلى أس يجب اتباع ما يأتي:

أ) نرتب حدود القوس. ب) يجب أن تكون مشتقة داخل القوس موجودة. ج) عند التكامل نقوم بحذف المشتقة.

مثال: جد التكامل $\int (x^2 + 3)^2 (2x)\,dx$

الحل:

$f(x) = x^2 + 3$ ، $f'(x) = 2x$ أي أن المشتقة متوفرة إذن نكامل بصورة مباشرة: $\because \int [f(x)]^2 f'(x)\,dx$

$$\int (x^2 + 3)^2 (2x)\,dx = \frac{[x^2 + 3]^3}{3} + c$$

ملاحظة: $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ ، $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

مثال: جد التكامل $\int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)\,dx$

الحل:

$$= \int (3x^2+8x+5)^6 \underbrace{(3x+4)}_{\times 2 \text{ نضرب}}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{2 قسمنا على}} \int (3x^2+8x+5)^6 \underbrace{(6x+8)}_{\text{المشتقة}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c = \frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7 + c$$

مثال: جد التكامل لكل مما يأتي:

الحل

a) $\int \sin^4 x \cos x\,dx = \frac{\sin^5 x}{5} + c$

b) $\int \tan^6 x \sec^2 x\,dx = \frac{\tan^7 x}{7} + c$

مثال: جد التكامل $\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$

الحل:

$$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{[x^2+2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{6}[x^2+2]^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال: جد التكامل $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$

الحل:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \int \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{\frac{3}{3}}_{\text{3 نضرب ونقسم على}}\,dx =$$

$$3\int \underbrace{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}_{\text{مشتقة داخل القوس}} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 3\frac{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 6\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} + c$$

في الدوال المثلثية علينا مراعاة ما يأتي:

1. نرتب بحيث نضع الدالة المثلثية ثم المشتقة.

2. يجب أن تكون المشتقة للدالة المثلثية موجودة.

مثال: جد تكامل:

الحل

1. $\int x^2 \sin x^3\, dx = \int \sin x^3\, x^2\, dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 \underbrace{3x^2}_{\text{مشتقة الزاوية}}\, dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

وزاري د 3 2017 د 1 تطبيقي 2023

2. $\int \sin x \cos^5 x\, dx = \int \cos^5 x \sin x\, dx = \int [\cos x]^5 \sin x\, dx \cdot \frac{-1}{-1}$

$= -\int [\cos x]^5 (-\sin x)\, dx = -\frac{[\cos x]^6}{6} + c$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}} = \int (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

$= \int (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\sec^2 x}_{\text{المشتقة}}\, dx = \frac{(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1+\tan x} + c$

4. $\int \tan x \sec^4 x\, dx = \int \sec^4 x \tan x\, dx = \int \sec^3 x \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{مشتقة الدالة}}\, dx = \frac{(\sec x)^4}{4} + c$

5. $\int \tan^6 x \sec^2 x\, dx = \int \tan^6 x \underbrace{\sec^2 x}_{\text{مشتقة الدالة}}\, dx = \frac{1}{7}\tan^7 x + c$

6. $\int x\sqrt{x+3}\, dx = \int (x+3-3)(\sqrt{x+3})\, dx = \int ((x+3)-3)(x+3)^{\frac{1}{2}}\, dx$

$= \int (x+3)^{\frac{3}{2}}\, dx - 3\int (x+3)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{(x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

1. $\int \sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta + c$
2. $\int \csc^2\theta\, d\theta = -\cot\theta + c$
3. $\int \tan^2\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta = \int \sec^2\theta\, d\theta - \int d\theta = \tan\theta - \theta + c$
4. $\int \cot^2\theta\, d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)\, d\theta = \int \csc^2\theta\, d\theta - \int d\theta = -\cot\theta - \theta + c$

5. $$\int \sin^2\theta\, d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\int d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta \underbrace{(2)}_{\text{مشتقة الزاوية}} d\theta\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

6. $$\int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\int d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta \underbrace{(2)}_{\text{مشتقة الزاوية}} d\theta\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

7. $$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

8. $$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

مثال: جد تكاملات كل مما يأتي:

الحل

1. $$\int 9\sin 3x\, dx = 3\int \underbrace{(3)}_{\text{مشتقة الزاوية}} \sin 3x\, dx = -3\cos 3x + c$$

2. $$\int x^2 \sin x^3\, dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتقة الزاوية}} \sin x^3\, dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$$

وزاري 2017 د 3 | 2023 د 1 تطبيقي

3. $$\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}\, dx$$

وزاري 2013 د 1 خارج القطر | 2014 د 4 أسئلة الأنبار | 2017 د 1 أسئلة الموصل | 2019 د 2 تطبيقي | 2020 د 2 تطبيقي | 2023 د 2 تطبيقي

$$= \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\, dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$$
$$= \int \pm(\sin x - \cos x)\, dx = \pm(-\cos x - \sin x) + c = \mp(\cos x + \sin x) + c$$

ملاحظة: $$\int \sec^2(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)$$

متابعة الحل

مثال: جد تكاملات كل مما يأتي:

4. $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^2 dx = \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\,dx$

وزاري 2000 د 1 2020 د 1 تطبيقي

$$= \int \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\,dx + \int \cos^2 2x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\,dx + \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\,dx + \frac{1}{2}\left(\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\cdot(4)\,dx\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

5. $\int (\sin x - \cos x)^7(\cos x + \sin x)\,dx = \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$

6. $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x}\,dx = \int \tan^{-3} x \sec^2 x\,dx = \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$

وزاري 2017 د 3 أسئلة الموصل 2018 د 2 2023 تمهيدي تطبيقي

قواعد: $\int \csc ax \cot ax\,dx = -\frac{1}{a}\csc ax$ ، $\int \sec ax \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\sec ax$

7. $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x \cos^2 x\,dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)\,dx$

وزاري 2008 د 2 خارج القطر 2019 د 3

$$= \int \cos x\,dx - \int \sin^2 x \cos x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

8. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan x \sec^2 x\,dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

وزاري 2020 د 3 تطبيقي 2021 تمهيدي تطبيقي

متابعة الحل

مثال: جد تكاملات كل مما يأتي:

9. $\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx = \int (2 \sin 3x \cos 3x) \cos^2 3x\, dx$

2020 د 1 | 2016 د 1 | 2014 د 3 وزاري

$= \frac{2}{-3} \int \cos^3 3x (\sin 3x)(-3)\, dx = \left(\frac{-2}{3}\right) \frac{\cos^4 3x}{4} + c = \frac{-1}{6} \cos^4 3x + c$

10. $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$

2020 د 2 | 2019 د 1 خارج القطر تطبيقي | 2015 د 1 | 2014 د 1 وزاري

$= \int \frac{(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx = \int (\cos 2x + \sin 2x)\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$

11. $\int \sin^2 3x\, dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int dx - \int \frac{\cos 6x}{2}\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + c$

12. $\int \cot^2 5x\, dx = \int (\csc^2 5x - 1)\, dx = \int \csc^2 5x\, dx - \int dx = -\frac{1}{5} \cot 5x - x + c$

13. $\int \tan^2 7x\, dx = \int (\sec^2 7x - 1)\, dx = \frac{1}{7} \tan 7x - x + c$

14. $\int \sin 4x \cdot \cos^2 2x\, dx$

ملاحظة: إذا كانت الزوايا في السؤال غير متساوية فنساوي الزوايا:

$\boxed{\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x}$, $\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}$

$= \int 2 \sin 2x \cos 2x \cos^2 2x\, dx = 2 \int (\cos 2x)^3 \sin 2x\, dx$

$= \frac{2}{-2} \int (\cos 2x)^3 (-2 \sin 2x)\, dx = -\frac{(\cos 2x)^4}{4} + c$

متابعة الحل

مثال: جد تكاملات كل مما يأتي:

15. $\int \cos 2x \cdot \sin^2 x \, dx$

وزاري 1 د 1997

$$\boxed{\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)} \quad , \quad \boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)}$$

$$= \int \cos 2x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2)\, dx - \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\, dx\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\right] + c = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{\sin 4x}{16} + c$$

(وردت إشارة الحد الأخير $+$ سهواً في الأصل والصحيح $-$).

مثال: جد تكامل $\int \cos^3 x \, dx$

وزاري د 2 خارج القطر 2008 د 3 2019

الحل:

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x)\cdot \cos x \, dx$$

$$= \int (\cos x - \sin^2 x \cos x)\, dx = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + c$$

مثال: جد تكامل $\int (\cos^2 x)^2 \, dx$

الحل:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$$

$$\int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + \cos 2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\right] + c = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

مثال: جد تكامل $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) \, dx$

وزاري د 1 خارج القطر 2017

الحل:

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) \, dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx$$

$$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x} \quad , \quad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$= \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

مثال: جد تكامل $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 - \cos x}$

وزاري د 3 تكميلي 2023

الحل:

$$\int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 - \cos x} = \int \frac{\sin^2 x \sin x \, dx}{1 - \cos x} = \int \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x \, dx}{1 - \cos x}$$

$$= \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)\sin x \, dx}{1 - \cos x} = \int (\sin x + \sin x \cos x) \, dx$$

$$= -\cos x + \frac{(\sin x)^2}{2} + c$$

مثال: جد تكامل $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

الحل:

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$$

$$= \int \pm(\sin x+\cos x)\,dx = \pm(-\cos x+\sin x)+c = \mp(\cos x-\sin x)+c$$

مثال: جد تكامل $\int \sqrt[3]{x^3+2x^5}\,dx$

الحل:

نستخرج عامل مشترك لأن ال مشتقة داخل القوس غير موجودة:

$$= \int \sqrt[3]{x^3(1+2x^2)}\,dx = \int x\sqrt[3]{1+2x^2}\,dx = \int x(1+2x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot 4x\,dx = \frac{1}{4}\frac{(1+2x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c = \frac{3}{16}(1+2x^2)^{\frac{4}{3}}+c$$

حل تمارين (4 - 4)

جد تكاملات كل مما يأتي ضمن مجال الدالة:

1)

الحل

$$\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx = \int \frac{(4x^4-12x^2+9)-9}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{4x^4}{x^2}-\frac{12x^2}{x^2}\right)dx$$

$$= \int (4x^2-12)\,dx = \frac{4}{3}x^3-12x+c$$

2) $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx \qquad \left(\sqrt{7x}=\sqrt{7}\sqrt{x}\ ,\ \sqrt{5x}=\sqrt{5}\sqrt{x}\right)$

وزاري 2019 د 2 تطبيقي

الحل

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7 \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}\,dx=\frac{-2}{\sqrt{35}}\frac{(3-\sqrt{5x})^8}{8}+c$$

$$=\frac{-1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5x})^8+c$$

3)

وزاري تمهيدي 2010 د 1 خارج القطر 2014 د 2 أحيائي 2021

الحل

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x\cos x}{1-\sin x}\,dx=\int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1-\sin x}\,dx$$

$$=\int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)\cos x}{1-\sin x}\,dx=\int (1+\sin x)\cos x\,dx$$

$$=\int (\cos x+\sin x\cos x)\,dx=\sin x+\frac{(\sin x)^2}{2}+c$$

4) $\int \csc^2 x\cos x\,dx \qquad \boxed{\csc x=\frac{1}{\sin x}}$

وزاري 2013 د 1

الحل

$$=\int \csc x\csc x\cos x\,dx=\int \csc x\frac{1}{\sin x}\cos x\,dx\ ,\ \boxed{\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x}$$

$$=\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+c$$

ويُحل بحل آخر بوضع $\csc^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$.

5)

الحل

$$\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx = \int (3x^2+5)^{-4}\cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\int (3x^2+5)^{-4}\cdot (6x)\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{18(3x^2+5)^3} + c$$

6) $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx = \int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx$ (نجعل المقدار مربع كامل)

وزاري 2020 د 3 | 2023 تطبيقي د 3 | 2025 تمهيدي

الحل

$$= \int (x+5)^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{(x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}(x+5)^{\frac{5}{3}} + c \quad \text{(مشتقة داخل القوس = 1)}$$

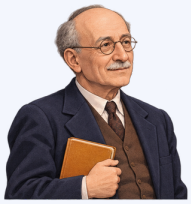
7)

الحل

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$= \int \sin x\,dx - \int \sin x\cos^2 x\,dx = \int \sin x\,dx + \int (\cos x)^2(-\sin x)\,dx$$

$$= -\cos x + \frac{(\cos x)^3}{3} + c$$



«هل استخدمت جميع المعطيات؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

8) $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (والمقام هو مشتقة تلك الزاوية cos تكامل زاوية)

الحل

$$= \int \frac{\cos(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = -2\int \cos(1-x)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة الزاوية}}\,dx$$

$$= -2\sin(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = -2\sin\sqrt{1-x} + c$$

لو كان السؤال أعلاه بالشكل التالي: $\int \frac{\sin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

(تكامل زاوية sin والمقام هو مشتقة تلك الزاوية)

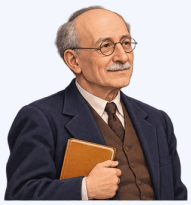
$$= \int \frac{\sin(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = -2\int \sin(1-x)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة الزاوية}}\,dx$$

$$= 2\cos(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = 2\cos\sqrt{1-x} + c$$

9) $\int (3x^2+1)^2\,dx$ (∵ مشتقة داخل القوس غير موجودة نفتح الأقواس)

الحل

$$= \int (9x^4 + 6x^2 + 1)\,dx = \frac{9x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + x + c$$



«في حلّ كل مسألة قدرٌ من الاكتشاف.»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

10) $\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx \qquad (x=\sqrt{x}\sqrt{x})$

الحل

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x}-\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx \qquad \text{عامل مشترك } \sqrt{x} \text{ نستخرج}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2\int \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}\,dx = 2\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 4\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

لو كان السؤال أعلاه بالشكل التالي: $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

وزاري د 2 2019 د 1 2025

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

$$= \int \left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \int \left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -2\int \left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}\,dx = -2\frac{\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -4\frac{\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

11) $\int (1+\cos 3x)^2\,dx$

2025 د 2 | 2013 د 2 | 1997 د 2 وزاري

الحل

$$= \int (1+2\cos 3x+\cos^2 3x)\,dx \qquad \boxed{\cos^2 3x = \frac{1}{2}(1+\cos 6x)}$$

$$= \int \left(1+2\cos 3x+\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right)dx$$

$$= \left[x+2\frac{\sin 3x}{3}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 6x}{6}\right)\right]+c = \frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{12}\sin 6x+c$$

الحل

12) $\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \sec^2 4x\,(4)\,dx = \frac{\tan 4x}{4}+c$

الحل

13) $\int \csc^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (2)\csc^2 2x\,dx = -\frac{\cot 2x}{2}+c$

الحل

14) $\int \tan^2 8x\,dx = \int (\sec^2 8x-1)\,dx = \frac{\tan 8x}{8}-x+c$

15) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}\,dx = \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}\,dx \qquad (f(x)=\cot 2x \implies f'(x)=-2\csc^2 2x)$

2020 د 2 | 2017 تمهيدي | 2016 د 3 خارج القطر | 2016 د 1 وزاري

الحل

$$= -\frac{1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}(-2\csc^2 2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(\cot 2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{-1}{3}(\cot 2x)^{\frac{3}{2}}+c = \frac{-1}{3}\sqrt{\cot^3 2x}+c$$

الحل

16) $\int \cos^2 2x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)+c = \frac{1}{2}x+\frac{\sin 4x}{8}+c$

الحل

17) $\int \sin^2 8x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 16x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 16x}{16}\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 16x}{32} + c$

وزاري تمهيدي أحيائي 2023 تمهيدي 2025

18) $\int \cos^4 3x\,dx = \int (\cos^2 3x)^2\,dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right]^2 dx$

وزاري د 1 2024 د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x)\,dx \qquad \left(\cos^2 6x = \frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \frac{2\sin 6x}{6} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 12x}{12}\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\sin 12x + c = \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$

اللوغاريتم الطبيعي

لتكن u دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x فإن مشتقة اللوغاريتم الطبيعي للدالة u هي:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة}} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}$$

وعليه فإن:

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$$

شرط أن تكون الدالة (u) موجبة. وتستخدم هذه الدالة في توفير المشتقة الأولى في بعض الدوال التي يصعب اشتقاقها وهي تملك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل:

$\ln 1 = 0$ ، $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ، $\ln(x^y) = y\ln x$ ، $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

مثال: إذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$y = \ln(3x^2 + 4) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

مثال: إذا كان $y = \ln(\sin x)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$y = \ln(\sin x) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

مثال: إذا كان $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \implies y = \ln x^{-2}$$

$$y = \ln x^{-2} = -2 \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{-2}{x}$$

مثال: إذا كان $y = \ln(\tan x + x^2)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$y = \ln(\tan x + x^2) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x + x^2}(\sec^2 x + 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x + 2x}{\tan x + x^2}$$

مثال: إذا كان $y = \ln(\ln x)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$y = \ln(\ln x) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

مثال: إذا كان $y = \ln 3x$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$$

مثال: جد مشتقة الدوال التالية:

الحل

1. $y = \ln(x \sin x) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x + \sin x}{x \sin x}$
2. $y = \ln(xy^2) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2xy + y^2}{xy^2}$ (باعتبار الاشتقاق الجزئي أو اشتقاق دالة بمتغير واحد)
3. $y = (\sin x)^x \implies \ln y = \ln(\sin x)^x \implies \ln y = x \ln \sin x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x\cos x}{\sin x} + \ln(\sin x) \implies y' = xy\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) + y\ln(\sin x)$$

تعريف: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ أي إذا كان المقام أسه (1) ومشتقته موجودة بالبسط فيكون تكامل ln.

مثال: جد تكامل كل مما يأتي:

الحل

1. $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + c$
2. $\int \frac{4x+1}{2x^2+x}\,dx = \ln|2x^2+x| + c$
3. $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$
4. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}\,dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + c$
5. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\sin\theta} = \ln|1+\sin\theta| + c$

الدالة الأسية (دالة اللوغاريتم الطبيعي العكسية)

الدالة الأسية e^u هي دالة عكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعي؛ بمعنى آخر هناك بعض الدوال عندما نشتقها أو نكاملها ندخل عليها الدالة الأسية ثم عندما ننتهي نقوم بإلغاء الدالة الأسية عن طريق إدخال دالة اللوغاريتم الطبيعي، الهدف من هذه العملية هي لتغيير شكل الدالة المراد العمل عليها.

$$\frac{d}{dx}(e^u) = (\text{الدالة})(\text{مشتقة الأس}) = e^u \frac{du}{dx}$$

وعليه فإن $\int e^u\,du = e^u + c$ وهي تمتلك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل:

$e = 2.71828$, $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, $e^0 = 1$, $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

مثال: لتكن $y = e^{\tan x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$y = e^{\tan x} \implies \frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \cdot (\sec^2 x)$$

مثال: جد $\int xe^{x^2}\,dx$

وزاري 2013 د 3

الحل

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

الدالة الأسية (الأساس عدد ثابت)

نفرض أن a عدد ثابت يمثل أساس الدالة الأسية فإن مشتقة أي دالة أسية مرفوعة لقوة u هي:

$$\frac{d}{dx}a^u = (\text{الدالة})(\ln \text{الأساس})(\text{مشتقة الأس}) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

وعليه فإن:

$$\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + c$$

(وردت e^u سهواً في الأصل والصحيح a^u).

وتتميز ببعض الخصائص التي ذكرناها في الدالة الأسية السابقة وسوف نوضح ذلك في المثال التالي:

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

الحل

1. $y = 4^{x^2-3} \implies \dfrac{dy}{dx} = 4^{x^2-3}\ln(4)(2x) = \ln 4\,(4^{x^2-3})2x$
2. $y = 5^{\sin x} \implies \dfrac{dy}{dx} = 5^{\sin x}\ln 5\,(\cos x)$
3. $y = (12)^{x^{\frac{1}{3}}} \implies \dfrac{dy}{dx} = (12)^{x^{\frac{1}{3}}} \cdot \ln(12) \cdot \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
4. $y = 7^{-\frac{x}{3}} \implies \dfrac{dy}{dx} = (7)^{-\frac{x}{3}} \cdot \ln(7)\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}\ln(7) \cdot (7)^{-\frac{x}{3}}$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

الحل

1. $y = e^{x^2+x} \implies \dfrac{dy}{dx} = e^{x^2+x}(2x+1)$
2. $y = e^{\sin x} \implies \dfrac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cos x$
3. $y = e^{-x} \implies \dfrac{dy}{dx} = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$
4. $y = \ln x \cdot e^x \implies \dfrac{dy}{dx} = \ln x \cdot e^x + e^x \cdot \dfrac{1}{x}$
5. $y = \sin(xe^x) \implies \dfrac{dy}{dx} = \cos(xe^x)[xe^x + e^x] = [xe^x + e^x]\cos(xe^x)$
6. $y = 3^{(2+4^x)} \implies \dfrac{dy}{dx} = 3^{(2+4^x)}(\ln 3)[4^x(\ln 4)(1)]$
7. $y = \cot e^{2x} \implies \dfrac{dy}{dx} = -\csc^2 e^{2x}(2e^{2x})$
8. $y = 5^{\sin x} \implies \dfrac{dy}{dx} = 5^{\sin x}\ln(5)\cos x = 5^{\sin x}\cos x\ln(5)$

مثال: جد تكامل لكل مما يأتي:

الحل

1. $\int e^{x^2+x}\underbrace{(2x+1)}_{\text{مشتقة الأس}}\,dx = e^{x^2+x}+c$
2. $\int e^{\sin x}\underbrace{(\cos x)}_{\text{مشتقة الأس}}\,dx = e^{\sin x}+c$
3. $\int x^2e^{x^3}\,dx = \int e^{x^3}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتقة الأس}}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+c$
4. $\int (1+e^x)^2\,dx = \int (1+2e^x+e^{2x})\,dx = \int \left[1+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2\right]dx = x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+c$
5. $\int e^{\tan x}\cdot \sec^2 x\,dx = e^{\tan x}+c$
6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx = [\ln(2+\tan x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(2+\tan\frac{\pi}{4}\right)-\ln\left(2+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

   وزاري 2011 د 1 | 2016 د 3 | تمهيدي 2025

   $= \ln(2+1)-\ln(2-1) = \ln 3-\ln 1$
7. $\int \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx = e^{\ln x}+c = x+c$
8. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}}+c$
9. $\int 4^x\,dx = 4^x\left(\frac{1}{\ln 4}\right)+c$
10. $\int 3^{\tan 7x}(\sec^2 7x)\,dx = \frac{1}{7}\int (7)\,3^{\tan 7x}(\sec^2 7x)\,dx = \frac{1}{7}\cdot 3^{\tan 7x}\left(\frac{1}{\ln 3}\right)+c$

حل تمارين (5 - 4)

س1 / جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

الحل

a) $y = \ln 3x \implies \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$

b) $y = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \implies \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{1}{x}$

c) $y = \ln x^2 \implies \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x}$

d) $y = (\ln x)^2 \implies \dfrac{dy}{dx} = 2(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}\ln x$

وزاري 2024 د 3 محاولات

e) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^3 \implies y = \ln x^{-3} \implies \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x^{-4}}{x^{-3}} = -3x^{-1} = \dfrac{-3}{x}$

f) $y = \ln(2 - \cos x) \implies \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(-\sin x)}{2 - \cos x} = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$

وزاري 2025 تمهيدي

g) $y = e^{-5x^2+3x+5} \implies \dfrac{dy}{dx} = e^{-5x^2+3x+5} \cdot (-10x + 3) = (-10x + 3)e^{-5x^2+3x+5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}} \implies \dfrac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}} \cdot \ln 9 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\ln 9)$

i) $y = 7^{-\frac{x}{4}} \implies \dfrac{dy}{dx} = 7^{-\frac{1}{4}x} \ln 7 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 7^{-\frac{x}{4}}\left(\dfrac{-\ln 7}{4}\right)$

j) $y = x^2e^x \implies \dfrac{dy}{dx} = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x = xe^x(x + 2)$

س2 / جد التكاملات الآتية:

الحل

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$ (فالتكامل هو ln مشتقة المقام موجودة)

$= [\ln|x + 1|]_0^3 = \ln(3 + 1) - \ln(0 + 1) = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 - 0 = \ln 2^2 = 2\ln 2$

متابعة الحل

س2 / جد التكاملات الآتية:

b)

وزاري تمهيدي 2012 تمهيدي 2015 د 3 2019 د 1 تطبيقي 2020 د 2 أحيائي 2022

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = [\ln|x^2+9|]_0^4 = \ln|16+9| - \ln|0+9| = \ln(25) - \ln(9)$$

$$= \ln 5^2 - \ln 3^2 = 2\ln 5 - 2\ln 3 = 2\ln\frac{5}{3}$$

c)

وزاري د 1 2012 د 1 2014 د 2 2016

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{\ln 5^2} - e^{\ln 3^2}] = \frac{1}{2}[5^2 - 3^2] = \frac{1}{2}[16] = 8$$

d)

وزاري تمهيدي أحيائي 2022

$$\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx = -\int_0^{\ln 2} e^{-x}(-1)\,dx = -[e^{-x}]_0^{\ln 2} = -[e^{-\ln 2} - e^0]$$

$$= -[e^{\ln 2^{-1}} - e^0] = -[2^{-1} - 1] = -\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}$$

e)

وزاري د 1 2011 د 2 2013 تمهيدي 2016 تمهيدي تطبيقي 2023 د 3 تكميلي 2023

$$\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x\,dx = \left[\frac{(1+e^x)^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{(1+e)^3}{3} - \frac{(1+e^0)^3}{3}\right] = \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{2^3}{3} =$$

$$\frac{(1+e)^3}{3} - \frac{8}{3}$$

ويمكن أن يُحل السؤال بطريقة ثانية وهي توزيع e^x على القوس بعد فتح القوس.

متابعة الحل

س2 / جد التكاملات الآتية:

f)

وزاري د 2 2011 د 2 2025

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx = [\ln(x^3+4x+1)]_0^1 = \ln(1^3+4(1)+1) - \ln(0^3+4(0)+1)$$

$$= \ln 6 - \ln 1 = \ln 6 - 0 = \ln 6$$

g)

وزاري د 1 خارج القطر 2012 د 2 2012 د 2 2015 د 2 أحيائي 2021 د 1 2024

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 e^{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[e^{x^{\frac{1}{2}}}\right]_1^4 = [e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e^1$$

h)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\tan x} = [\ln|2+\tan x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|2+\tan\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|2+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 - 0 = \ln 3$$

i)

وزاري تمهيدي 2015 د 2 تطبيقي 2023 د 1 2025

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x\,dx$$

$$= \left[\frac{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right] = 2\left[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right] = 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

متابعة الحل

س2 / جد التكاملات الآتية:

j)

وزاري تمهيدي تطبيقي 2020

$$\int \cot^3 5x\,dx = \int \cot^2 5x \cot 5x\,dx = \int (\csc^2 5x - 1)\cot 5x\,dx$$

$$= \int (\cot 5x \csc^2 5x - \cot 5x)\,dx = \int (\cot 5x \csc^2 5x)\,dx - \int (\cot 5x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\int (5)\cot 5x \csc^2 5x\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{\cos 5x}{\sin 5x}(5)\,dx$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c = -\frac{1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c$$

k)

وزاري د 1 خارج القطر 2011

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx = -[e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}\right] = -[e^0 - e^1] = -1 + e$$

l)

وزاري د 1 خارج القطر 2014 د 1 محاولات تطبيقي 2024

$$\int_1^2 xe^{-\ln x}\,dx = \int_1^2 xe^{\ln x^{-1}}\,dx = \int_1^2 x\cdot x^{-1}\,dx = \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

س3 / أثبت أن:

الحل

a) $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$

وزاري 2019 د 1 2015 د 2 خارج القطر

$$L.H.S = \int_1^8 \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx\right)$$

$$= 3\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = 3\cdot\frac{2}{3}\left[(8)^{\frac{1}{3}}-1\right]^{\frac{3}{2}} - 2\left[(1)^{\frac{1}{3}}-1\right]^{\frac{3}{2}} = 2[2-1]^{\frac{3}{2}} - 2[1-1]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2(1) = 2 = R.H.S$$

b) $\int_{-2}^4 |3x-6|\,dx = 30$

وزاري 2014 د 3 2017 د 2 خارج القطر 2019 تمهيدي 2021 د 2 تطبيقي 2023 د 3 تكميلي

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & x \geq 2 \\ -3x+6 & x < 2 \end{cases}$$

$$L.H.S = \int_{-2}^4 |3x-6|\,dx = \int_{-2}^2 (-3x+6)\,dx + \int_2^4 (3x-6)\,dx$$

$$= \left[\frac{-3}{2}x^2+6x\right]_{-2}^2 + \left[\frac{3}{2}x^2-6x\right]_2^4$$

$$= \left[\frac{-12}{2}+12\right] - \left[\frac{-12}{2}-12\right] + \left[\frac{48}{2}-24\right] - \left[\frac{12}{2}-12\right]$$

$$= [-6+12] - [-6-12] + [24-24] - [6-12]$$

$$= 6+18+0+6 = 30 = R.H.S$$

س4 / $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فإذا كان $\int_1^6 f(x)\,dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x)+3]\,dx = 32$ فجد $\int_{-2}^1 f(x)\,dx$.

وزاري د1 2016 د2 2019 د1 محاولات تطبيقي 2024

الحل:

$$\because \int_{-2}^{6} [f(x)+3]\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [3x]_{-2}^{6} = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [3(6) - 3(-2)] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [18+6] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [24] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 32 - 24 = 8$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{6} f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6 = 8 \implies \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 8 - 6 \implies \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 2$$

س5 / إذا علمت أن $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$ فجد قيمة $a \in \mathbb{R}$.

وزاري تمهيدي 2014 د1 2015 د3 2019 د2 تطبيقي 2021 د3 2024 د3 محاولات 2024

الحل:

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx \implies \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = 2\left[\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right]$$

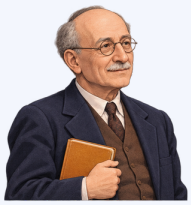
$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-1 = 2[1-0] \implies \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-1-2=0$$

$$\left[\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-3=0\right]\times 2 \implies a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0$$

either $a+3=0 \implies a=-3$ (يهمل)

or $a-2=0 \implies a=2$ (لأن $a>1$)



«هل يمكنك التحقّق من النتيجة؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

س6 / لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) فجد $\int_1^3 f(x)\,dx$.

وزاري د 2 تطبيقي 2020

الحل:

∵ للدالة نهاية صغرى:

$$f(x) = x^2 + 2x + k$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \implies 2x + 2 = 0 \implies 2x = -2 \xrightarrow{\div 2} x = -1$$

لأنه عندما يأتي في السؤال نهاية صغرى تمثل الإحداثي y في النقطة، فالنقطة $(-1, -5)$ هي نقطة نهاية صغرى محلية وهي تحقق معادلة الدالة $f(x)$.

$$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k \implies -5 = 1 - 2 + k \implies k = -4$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 4x\right]_1^3 = \left[\frac{27}{3} + \frac{2(9)}{2} - 12\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{2} - 4\right]$$

$$= [9 + 9 - 12] - \left[\frac{1}{3} + 1 - 4\right] = 6 - \left[\frac{-8}{3}\right] = \frac{18 + 8}{3} = \frac{26}{3}$$



«عالم الرياضيات مثل الرسّام أو الشاعر، يصنع الأنماط.»

غودفري هاردي
دفاع عالم رياضيات

س7/ إذا كان المنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ له نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)\,dx-\int_0^a f''(x)\,dx$.

وزاري 2015 د 4 أسئلة النازحين | 2017 د 1 | 2019 د 1 خارج القطر | 2023 د 2 أحيائي

الحل:

نقطة الانقلاب ناتجة من مساواة المشتقة الثانية للصفر:

$$f(x)=(x-3)^3+1$$

$$f'(x)=3(x-3)^2$$

$$f''(x)=6(x-3) \implies 6(x-3)=0 \xrightarrow{\div 6} x-3=0 \implies x=3$$

$f(3)=(3-3)^3+1=1$ نقطة الانقلاب هي $(3,1)$

$$(3,1)\,,\,(a,b) \implies a=3\,,\,b=1$$

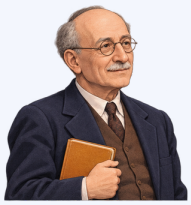
$$\int_0^b f'(x)\,dx-\int_0^a f''(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 3(x-3)^2\,dx-\int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$=3\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1-6\left[\frac{(x-3)^2}{2}\right]_0^3$$

$$=[(1-3)^3-(0-3)^3]-[3(3-3)^2-3(0-3)^2]$$

$$=[-8+27]-[0-27]=[19+27]=46$$



«ما المجهول؟ وما المعطيات؟ وما الشرط؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

إيجاد مساحة المنطقة المستوية

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات

1. نساوي الدالة المعطاة بالصفر ثم نحل المعادلة لإيجاد قيم x ومن ثم يتحول السؤال إلى أحد الاحتمالات الخمسة التالية:
   - **أ-** إذا أعطيت الفترة $[a,b]$ في الدالة فنقوم بتصفير الدالة واستخراج قيم x فإذا كانت تنتمي إلى الفترة المعطاة فنقوم بتجزئة التكامل إلى جزئين أو أكثر. أما إذا كانت لا تنتمي لها فلا نجزئ التكامل ولكن في كلتا الحالتين نقوم بأخذ القيم الناتجة المطلقة للتكاملات.
   - **ب-** تعطى القيم على شكل $[a,b]$ مثلاً أو على شكل عبارة المستقيمين $x=a, x=b$ ويكون لها نفس التفسير السابق.
   - **ج-** إذا لم تُعطَ فترة أو مستقيمين في السؤال فإن قيم x الناتجة ترتب تصاعدياً واعتبارها قيم التكامل دون إهمال أي متجهة وهي على الأقل قيمتين.
   - **د-** إذا كان المطلوب إيجاد المساحة بين منحني ومحور السينات ومستقيم $x=a$ فقط، نقوم بإضافة هذه القيمة إلى القيم الناتجة من مساواة الدالة بالصفر ثم ترتب تصاعدياً واعتبارها فترة دون إهمال أي قيمة.
   - **هـ-** هناك بعض الدوال لا يمكن تحليلها لإيجاد قيمة x عند التصفير فإن المساحة تكون تكاملاً واحداً وعلى الفترة المعطاة.

«أجمل الأفكار وأعظمها هي أفكار الشباب التي صقلها الزمن والتجربة.»

صوفي جيرمان
الأعمال الفلسفية



مثال 1: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$.

وزاري تمهيدي 2007

الحل:

$$f(x) = x^3 - 4x \implies x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

either $x = 0$

or $x^2 - 4 = 0 \implies x = \mp 2$ $\boxed{x = 0}$, $\boxed{x = 2}$, $\boxed{x = -2}$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = [0] - [4 - 8] = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{0}^{2} = [4 - 8] - [0] = -4$$

$$A = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8 \text{ unit}^2$$

مثال 2: جد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 1, x =$ 3.

وزاري د 3 2013

الحل:

حيث لا تجزأ الفترة فنعتمد على الفترة المعطاة $[1, 3]$:

$$x^2 = 0 \implies x = 0 \notin [1, 3]$$

$$A = \int_{1}^{3} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

مثال 3: جد المساحة المحددة بـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.

وزاري د 1 2013 د 3 تطبيقي 2023

الحل:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \implies x(x-2)(x-1) = 0$$

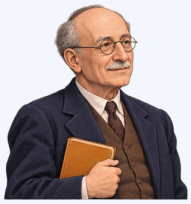
either $x = 0$ or $(x-2)(x-1) = 0$

$$\boxed{x = 0} \quad , \quad \boxed{x = 1} \quad , \quad \boxed{x = 2}$$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 \implies A_1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2 \implies A_2 = (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$



«هل تستطيع أن تحلّ جزءًا من المسألة؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

مثال 4: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$.

الحل:

ملاحظة: بين -1 و1 يقع المنحني تحت محور السينات، فيكون تكامل تلك الفترة سالبًا. لإيجاد المساحة الكلية نأخذ مطلق ناتج كل فترة على حدة، ثم نجمع.

$$x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \mp 1 \in [-2, 3]$$

الفترات: $[-2, -1], [-1, 1], [1, 3]$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} = \left(\frac{-1}{3} + 1\right) - \left(\frac{-8}{3} + \frac{6}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = 9\frac{1}{3} \text{ unit}^2$$

مثال 5: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 3x^2 + 4$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1, 1]$.

الحل:

نجعل $y = 0$:

$$3x^2 + 4 = 0 \implies 3x^2 = -4 \implies x^2 = \frac{-4}{3} \quad \text{(لا يمكن)}$$

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 + 4)\, dx$$

$$A = [x^3 + 4x]_{-1}^{1} = (1 + 4) - (-1 - 4) = (5 + 5) = |10| = 10 \text{ unit}^2$$

ملاحظة:

- $\sin x = 0 \implies x = 0 + n\pi$ حسب الحاجة $\quad n = 0, 1, 2, -1, -2$
- $\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ حسب الحاجة $\quad n = 0, 1, 2, -1, -2$

مثال 6: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

وزاري تمهيدي أحيائي 2021

الحل:

نجعل $y = 0$:

$$\sin x = 0 \implies x = 0 + n\pi \qquad n = 0, 1, 2, -1, -2$$

نأخذ قيم موجبة وسالبة لأن الفترة المعطاة موجبة وسالبة:

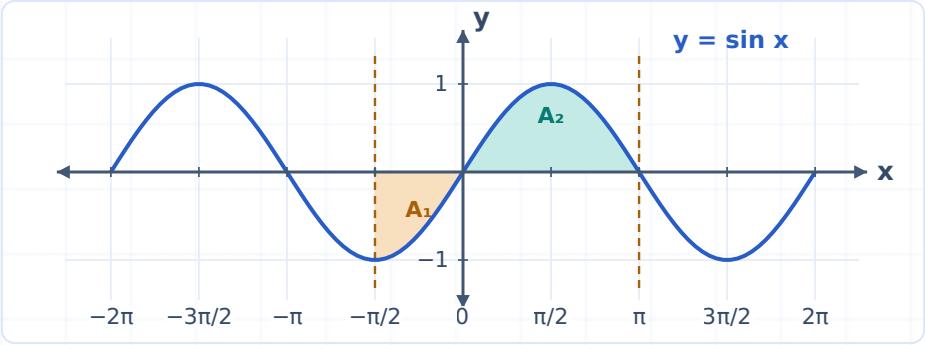
- $n = 0,\ x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ – يجزئ التكامل
- $n = 1,\ x = \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ – لا يجزئ التكامل
- $n = 2,\ x = 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ – لا يجزئ التكامل
- $n = -1,\ x = -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ – لا يجزئ التكامل
- $n = -2,\ x = -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ – لا يجزئ التكامل

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx\right|$$

$$A = \left|[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|[-\cos x]_{0}^{\pi}\right| = \left|-\cos 0 + \cos\frac{-\pi}{2}\right| + \left|-\cos\pi + \cos 0\right|$$

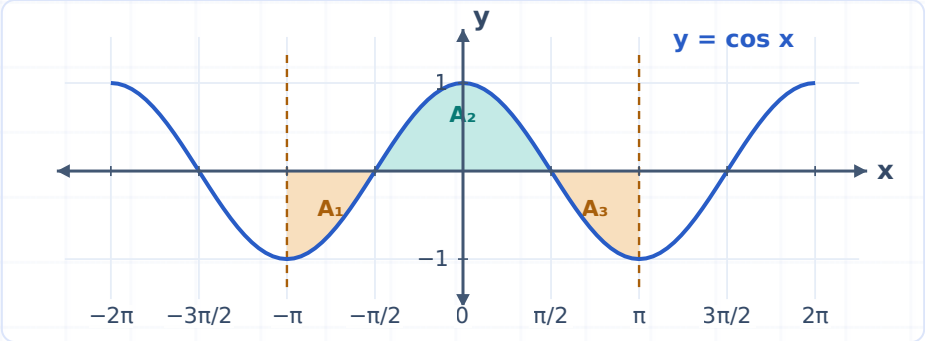
$$A = |-1 + 0| + |1 + 1| = |-1| + |2| = 1 + 2 = 3$$



ملاحظة: رسم منحني الـ sin فعلى أساسه نجد القيمة المنتمية إلى الفترة المعطاة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

مثال 7: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$.

الحل



ملاحظة: رسم منحني الـ cos فعلى أساسه نجد القيمة المنتمية إلى الفترة المعطاة $[-\pi, \pi]$.

$$\cos x = 0 \quad , \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- $n = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$ – يجزئ التكامل
- $n = 1,\ x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$ – لا يجزئ التكامل
- $n = -1,\ x = \frac{-\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$ – يجزئ التكامل
- $n = -2,\ x = \frac{-3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$ – لا يجزئ التكامل
- $n = 2,\ x = \frac{5\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$ – لا يجزئ التكامل

$$[-\pi, \pi] \implies \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0 - 1 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4 \text{ unit}^2$$

واجبات H.W

- **س1 / واجب:** جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 4x$ ومحور السينات على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 1 2007 د 1 2018

- **س2 / واجب:** جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \cos 2x$ ومحور السينات ضمن الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 2 2003

- **س3 / واجب:** جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 3x^2 - 6x$ ومحور السينات.

المساحة المحددة بمنحنيين

إذا علمت معادلتي منحني $f(x), g(x)$ المعرفتين على الفترة $[a, b]$ وكان المطلوب إيجاد المساحة بينهما فنقوم بإيجاد الدالة المولدة وهي $h(x) = f(x) - g(x)$ مع مراعاة الاحتمالات الخمسة سابقة الذكر بالنسبة للدالة المولدة $h(x)$:

$$A = \left| \int_a^b h(x)\, dx \right|$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة المولدة لها أكثر من صورة واحدة فيمكن إجراء التكامل على أي صورة منها ما لم نضرب بعدد أو نقسم على عدد أو نرفع الطرفين إلى قوة معينة كأن تكون تربيع أو جذر.



«بالمنطق نبرهن، وبالحدس نبتكر.»

هنري بوانكاريه

قيمة العلم

مثال: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$.

وزاري د 1 2011

الحل:

الدالة المولدة $h(x) = \sqrt{x} - x$

$x = \sqrt{x}$ (بالتربيع)

$x^2 = x \implies x(x-1) = 0$

$x = 0\,,\ x = 1 \qquad x \in [0,1]$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$A = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1}{6} \implies A = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}\ \text{unit}^2$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$.

وزاري تمهيدي 2015 د 3 2017 د 3 تطبيقي 2019

الحل:

الدالة المولدة $h(x) = x^3 - x$

$x^3 - x = 0 \implies x(x^2-1) = 0 \implies$ either $x = 0$ or $x^2 = 1 \implies x = \pm 1$

$\boxed{x = 0}\,,\ \boxed{x = 1}\,,\ \boxed{x = -1} \qquad [-1,0],\ [0,1]$

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$A = \left|(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x)=\cos x$ ، $g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري تمهيدي خارج القطر 2014 د 2 2017 د 2 خارج القطر 2017 د 1 تطبيقي 2019 د 2 تطبيقي 2021
تمهيدي تطبيقي 2023 د 1 تطبيقي 2023 د 3 تكميلي 2023

الحل:

$$[\sin x=\cos x]\div\cos x \implies \tan x=1 \implies x=\frac{\pi}{4}$$ زاوية الإسناد

دالة الظل موجبة في الربعين الأول والثالث:

$$x=\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{or} \quad x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A=\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\,dx\right|=\left|[\sin x+\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|[\sin x+\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A=\left|\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right|+\left|\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$A=\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(-1+0)\right|+\left|(1+0)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|=\left|\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right|+\left|1-\frac{2}{\sqrt{2}}\right|$$

$$A=|\sqrt{2}+1|+|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}\ \text{unit}^2$$

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y=\cos x$ ، $y=-\sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

الحل:

زاوية الإسناد $\frac{\pi}{4}$ حيث دالة الظل تكون سالبة في الربعين الثاني والرابع:

$$-\sin x=\cos x \implies -\tan x=1$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{or} \quad x=2\pi-\frac{\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)\,dx=[\sin x-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$A=|(1-0)-(-1-0)|=|1+1|=|2|=2\ \text{unit}^2$$

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sin 2x$ ، $g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 2 2005

الحل:

$$h(x)=\sin 2x-\sin x$$

$$2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$$

$$\sin x(2\cos x-1)=0$$

$$\text{either } \sin x=0 \implies x=0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ (لا يجزئ)} \quad , \quad x=\pi\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{or } \cos x=\frac{1}{2} \implies x=\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x(2\cos x-1)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x(2\cos x-1)\,dx$$

$$A=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)(-2\sin x)\,dx+\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x-1)(-2\sin x)\,dx$$

$$A=-\frac{1}{4}\left[(2\cos x-1)^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left(-\frac{1}{4}\right)\left[(2\cos x-1)^2\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=\left|-\frac{1}{4}\left[\left(2\cos\frac{\pi}{3}-1\right)^2-(2\cos 0-1)^2\right]\right|+\left|-\frac{1}{4}\left[\left(2\cos\frac{\pi}{2}-1\right)^2-\left(2\cos\frac{\pi}{3}-1\right)^2\right]\right|$$

$$A=\left|\frac{-1}{4}\left[(1-1)^2-(2-1)^2\right]\right|+\left|\frac{-1}{4}\left[(0-1)^2-(1-1)^2\right]\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

المسافة

المسافة: ويرمز لها بالرمز (d) وهي كمية غير متجهة، أما الإزاحة فهي $S(t)$ والسرعة $V(t)$ والتعجيل $a(t)$ وهي كميات متجهة لذلك فإن:

$$d=\int_{t_1}^{t_2}|V(t)|\,dt \quad , \quad S(t)=\int_{t_1}^{t_2}V(t)\,dt \quad , \quad V(t)=\int a(t)\,dt$$

ملاحظة:

1. أقصى مسافة يصل إليها الجسم عند السرعة $0=$.
2. بُعد الجسم بعد مرور 3 sec من البدء بالحركة: $[0,3]$.

ملاحظات:

1. إذا كانت $V(t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم فإن المسافة المقطوعة في الثانية t هي $d = \left|\int_{t-1}^{t} V(t)\,dt\right|$ فمثلاً إذا طُلب في السؤال جد المسافة خلال الثانية الثامنة يعني حساب $\int_{7}^{8}$.
2. إذا كانت $V(t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم بعد مرور t ثانية من بدء الحركة فإن بعد الجسم هو $S = \int_{0}^{t} V(t)\,dt$.
3. وإذا كانت $a(t)$ تمثل تعجيل جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t)$ فإننا (نكامل بالتكامل غير المحدد):

$$\int a(t)\,dt = V(t) + c$$

4. الإزاحة هي تكامل محدد للسرعة ولا نأخذ المطلق لأن الناتج لا يهم إذا كان موجب أو سالب أو صفر.
5. أقصى سرعة يصل إليها الجسم عندما يكون التعجيل $0 =$.

مثال: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4$ m/s فجد:

الحل

- **أ) المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$:**

$$V(t) = 0 \implies 2t - 4 = 0 \implies t = 2 \in [1,3]$$

$$d = \left|\int_{1}^{2} (2t-4)\,dt\right| + \left|\int_{2}^{3} (2t-4)\,dt\right| = \left|[t^2 - 4t]_1^2\right| + \left|[t^2 - 4t]_2^3\right|$$

$$d = |(4-8) - (1-4)| + |(9-12) - (4-8)| = 1 + 1 = 2$$

- **ب) الإزاحة المقطوعة بالفترة $[1,3]$:**

$$S(t) = \int_{1}^{3} (2t-4)\,dt = [t^2 - 4t]_1^3 = [9-12] - [1-4] = -3 + 3 = 0$$

- **ج) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة:**

$$d = \left|\int_{4}^{5} V(t)\,dt\right| = \left|\int_{4}^{5} (2t-4)\,dt\right| = \left|[t^2 - 4t]_4^5\right| = |[25-20] - [16-16]| = 5 \text{ m}$$

- **د) بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة:**

$$S = \left|\int_{0}^{4} (2t-4)\,dt\right| = \left|[t^2 - 4t]_0^4\right| = [16-16] - [0] = 0$$

مثال: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18\ \text{m/s}^2)$ سرعته قد أصبحت $(82\ \text{m/s})$ بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة. أحسب:

1. المسافة خلال الثانية الثالثة.
2. بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني.
3. جد السرعة بعد مرور 10 ثواني.

الحل:

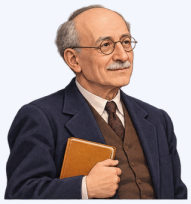
$$V(t) = \int a(t)\,dt \implies V(t) = \int 18\,dt = 18t + c$$

$V(t) = 82 \quad$ عندما $t = 4$

$$82 = 18(4) + c \implies c = 82 - 72 = 10$$

$$V(t) = 18t + 10$$

1. $$d = \int_2^3 (18t + 10)\,dt = \left[\frac{18t^2}{2} + 10t\right]_2^3 = [81 + 30] - [36 + 20] = 111 - 56 = 55\ \text{m}$$
2. $$S = \int_0^3 (18t + 10)\,dt = [9t^2 + 10t]_0^3 = [81 + 30] - [0] = 111\ \text{m}$$
3. $V(t) = 18t + 10 \implies V(10) = 18(10) + 10 = 190\ \text{m/s}$



«هل تعرف نظرية يمكن أن تفيدك؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

حل تمارين (6 - 4)

1) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$ ، $x = -1$.

وزاري د 1 محاولات تطبيقي 2024

الحل:

نجعل $y = 0$ لإيجاد نقاط التقاطع:

$$x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \in [-1, 1] \quad , \quad x = 1 \in [-1, 1]$$

$$A = \left| \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{1} f(x)\,dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-1}^{0} (x^4 - x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^4 - x)\,dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{1} \right| = \left| (0 - 0) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) \right|$$

$$= \left| \frac{-2 - 5}{10} \right| + \left| \frac{2 - 5}{10} \right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$



«مصدر الرياضيات العظيمة هو الحالة الخاصة، المثال الملموس.»

بول هالموس

أريد أن أكون عالم رياضيات

2) جد المساحة المحددة للدالة $f(x)=x^4-3x^2-4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ وعلى محور السينات.

الحل:

نجعل $f(x)=0$ لإيجاد نقاط التقاطع:

$$x^4-3x^2-4=0 \implies (x^2-4)(x^2+1)=0$$

either $x=\pm 2\in[-2,3]$ or $x^2+1=0 \implies x^2=-1$ (يهمل)

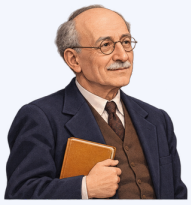
$$x=2\in[-2,3] \quad \text{or} \quad x=-2\in[-2,3]$$

$$A=\left|\int_{-2}^{2} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{3} f(x)\,dx\right|$$

$$A_1=\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)\,dx=\left[\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right]_{-2}^{2}=\left[\frac{32}{5}-8-8\right]-\left[\frac{-32}{5}+8+8\right]=\frac{64-160}{5}=\frac{-96}{5}$$

$$A_2=\int_{2}^{3}(x^4-3x^2-4)\,dx=\left[\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right]_{2}^{3}=\left[\frac{243}{5}-27-12\right]-\left[\frac{32}{5}-8-8\right]=\frac{211-115}{5}=\frac{96}{5}$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{-96}{5}\right|+\left|\frac{96}{5}\right|=\frac{192}{5}\ \text{unit}^2$$



«ابحث عن العلاقة بين المعطيات والمجهول.»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

3) جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات.

وزاري د 3 2020 | تمهيدي تطبيقي 2022 | د 3 2024 | د 3 محاولات 2024

الحل:

$$x^4 - x^2 = 0 \implies x^2(x^2 - 1) = 0$$

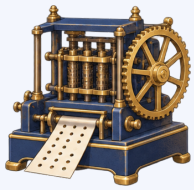
$$\text{either } x^2 = 0 \implies x = 0$$

$$\text{or } x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

$$A = \left| \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^4 - x^2)\, dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{0}^{1} \right| = \left| [0] - \left[\frac{-1}{5} + \frac{1}{3} \right] \right| + \left| \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right] - [0] \right|$$

$$= \left| \frac{-2}{15} \right| + \left| \frac{-2}{15} \right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15} \text{ unit}^2$$



«تنسج الآلة التحليلية أنماطًا جبرية كما ينسج نول الجاكار الأزهار والأوراق.»

آدا لوفليس

ملاحظات عن الآلة التحليلية

4) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 2 تطبيقي 2020

الحل:

الفترة موجبة فقط فلا نعوض بالقيم السالبة حيث $n = 0, 1, 2$:

$$\sin 3x = 0 \implies 3x = 0 + n\pi$$

- عندما $n = 0$: $x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ – لا يجزئ
- $n = 1$: $x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ – يجزئ
- $n = 2$: $x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ – لا يجزئ

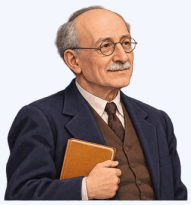
$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\, dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right| + \left|\left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\frac{-\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3} - \frac{-\cos 3(0)}{3}\right| + \left|\frac{-\cos 3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} - \frac{-\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3}\right|$$

$$A = \left|\frac{-\cos \pi}{3} - \frac{-\cos(0)}{3}\right| + \left|\frac{-\cos \frac{3\pi}{2}}{3} - \frac{-\cos \pi}{3}\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-(-1)}{3}\right] - \left[\frac{-1}{3}\right]\right| + \left|[0] - \left[\frac{-(-1)}{3}\right]\right| = \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$



«هل يمكنك إعادة صياغة المسألة؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

5) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 1 خارج القطر 2016

الحل:

نجعل $f(x) = 0$ لإيجاد نقاط التقاطع:

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \implies \cos 2x = 0 \implies 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0, 1$$

- $n = 0 \implies 2x = \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ – يجزئ
- $n = 1 \implies 2x = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ – لا يجزئ

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right| = \left|\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\sin 2(0)}{2}\right| + \left|\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right| + \frac{1}{2}\left|\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}|1 - 0| + \frac{1}{2}|0 - 1| = \frac{1}{2}|1| + \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ unit}^2$$

ملاحظة: إذا كانت الصيغة:

$$y = 1 - 2\sin^2 x\ ,\ y = \cos^2 x - \sin^2 x\ ,\ y = \cos^4 x - \sin^4 x \implies \cos 2x$$

$$y = 1 - 2\cos^2 x\ ,\ y = \sin^2 x - \cos^2 x \xrightarrow{\text{كلها تعطي}} -\cos 2x$$



«علينا أن نعرف، وسنعرف.»

ديفيد هيلبرت

خطابه الإذاعي سنة ١٩٣٠

6) جد المساحة المحددة بالدالتين $y=\frac{1}{2}x$ ، $y=\sqrt{x-1}$ وعلى الفترة $[2,5]$.

الحل:

نجعل $f(x)=g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع:

$$\frac{1}{2}x=\sqrt{x-1} \quad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$\frac{1}{4}x^2=x-1 \xrightarrow{\times 4} x^2=4x-4 \implies x^2-4x+4=0 \implies (x-2)^2=0 \xrightarrow{\text{بالجذر}} x-2=0$$

$$x=2\in[2,5] \quad \text{(لا نجزئ التكامل)}$$

$$A=\int_2^5\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{x-1}\right)dx$$

$$A=\left|\int_2^5\left[\frac{1}{2}x-(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5\right|$$

$$A=\left|\left(\frac{25}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)\right|=\left|\left(\frac{25}{4}-\frac{16}{3}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)\right|$$

$$A=\left|\frac{75-64-12+8}{12}\right|=\frac{7}{12}\ \text{unit}^2$$

7) جد المساحة المحددة بالدالتين $y=x^4-12$ ، $y=x^2$.

وزاري 2 د 1997 | 1 د 2008 | 1 د خارج القطر 2008 | 1 د خارج القطر 2015 | 2015 | 3 د خارج القطر 2016

الحل:

نجعل $f(x)=g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع:

$$x^4-12=x^2 \implies x^4-x^2-12=0 \implies (x^2-4)(x^2+3)=0$$

either $x=\pm 2$ or $x=\pm\sqrt{-3}$ (يهمل)

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(x^4-x^2-12)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-12x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$A=\left|\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-24\right)-\left(\frac{-32}{5}+\frac{8}{3}+24\right)\right|$$

$$A=\left|\frac{64}{5}-\frac{16}{3}-48\right|=\left|\frac{192-80-720}{15}\right|=\left|\frac{-608}{15}\right|=\frac{608}{15}\ \text{unit}^2$$

8) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$ ، $g(x)=\sin x\cos x$ **حيث** $x\in[0,2\pi]$.

وزاري د 2 1998 | د 1 2004 | 2009 تمهيدي | د 1 2014 | د 1 خارج القطر 2015 | د 2 أحيائي 2021 | د 1 2024

د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل:

نجعل $f(x)=g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع:

$$h(x)=\sin x\cos x-\sin x \implies \sin x(\cos x-1)=0$$

$$\text{either } \sin x=0 \implies x=0\in[0,2\pi]\ ,\ x=\pi\in[0,2\pi]\ ,\ x=2\pi\in[0,2\pi]$$

$$\text{or } \cos x-1=0 \implies \cos x=1 \implies x=0\in[0,2\pi]\ ,\ x=2\pi\in[0,2\pi]$$

$$A=\left|\int_0^{\pi}(\sin x\cos x-\sin x)\,dx\right|+\left|\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x\cos x-\sin x)\,dx\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{\sin^2 x}{2}+\cos x\right]_0^{\pi}\right|+\left|\left[\frac{\sin^2 x}{2}+\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{\sin^2(\pi)}{2}+\cos(\pi)\right]-\left[\frac{\sin^2(0)}{2}+\cos(0)\right]\right|+$$
$$\left|\left[\frac{\sin^2(2\pi)}{2}+\cos(2\pi)\right]-\left[\frac{\sin^2(\pi)}{2}+\cos(\pi)\right]\right|$$

$$A=|[(0-1)-(0+1)]|+|[(0+1)-(0-1)]|=|-1-1|+|1+1|=|-2|+2=4$$

9) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=2\sin x+1$ ، $g(x)=\sin x$ **حيث** $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$.

وزاري د 2 2013 | د 1 أسئلة النازحين 2015

الحل:

نجعل $f(x)=g(x)$ لإيجاد نقط التقاطع:

$$2\sin x+1-\sin x=0 \implies \sin x+1=0 \implies \sin x=-1 \implies x=\frac{3\pi}{2}\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$A=\left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)\,dx\right|=\left|[-\cos x+x]_0^{\frac{3\pi}{2}}\right|$$

$$A=\left|\left(-\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)-(-\cos(0)+0)\right|=\left|\left(0+\frac{3\pi}{2}\right)-(-1)\right|=\left|\frac{3\pi}{2}+1\right|=\frac{3\pi}{2}+1$$

10) جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات.

وزاري د 1 2005 | د 1 خارج القطر 2019 | د 2 2019

الحل:

نجعل $y = 0$ لإيجاد نقط التقاطع:

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \implies x(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$x(x+1)(x+3) = 0 \implies \boxed{x = 0}, \boxed{x = -1}, \boxed{x = -3}$$

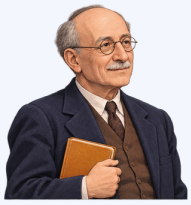
$$A = \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)\, dx \right| + \left| \int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)\, dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-3}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right] - \left[\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2} \right] \right| + \left| (0) - \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right] \right|$$

$$A = \left| \frac{3 - 16 + 18 - 243 + 432 - 162}{12} \right| + \left| \frac{-3 + 16 - 18}{12} \right|$$

$$A = \frac{32}{12} + \left| \frac{-5}{12} \right| = \frac{32 + 5}{12} = \frac{37}{12} = 3\frac{1}{12} \text{ وحدة مساحة}$$



«هل يمكنك استخدام النتيجة أو طريقة الحل في مسألة أخرى؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

11): جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (3t^2 - 6t + 3)$ m/s إحسب:

وزاري د 1 2015

- **a)** المسافة المقطوعة في الفترة $[2, 4]$
- **b)** الإزاحة في الفترة $[0, 5]$

وزاري تمهيدي تطبيقي 2021

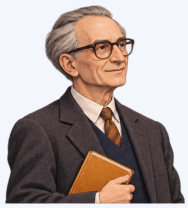
الحل:

$$[3t^2 - 6t + 3 = 0] \div 3$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \implies (t-1)(t-1) = 0 \implies t - 1 = 0 \implies t = 1 \notin [2, 4]$$

a) $d = \left| \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)\, dt \right| = \left| [t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4 \right| = |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)| = |28 - 2| = 26$ m

b) $s = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\, dt = [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5 = (125 - 75 + 15) - (0) = 65$ m



«ما تفعله هو المحاولة والخطأ، والتجريب والتخمين.»

بول هالموس

أريد أن أكون عالم رياضيات

12) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ \text{m/s}^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ \text{m/s}$ إحسب:

وزاري 2011 د 2 | 2016 د 3 | 2019 د 1 | 2021 د 2 تطبيقي

- **a)** السرعة عندما $t=2$
- **b)** المسافة خلال الفترة $[1,2]$
- **c)** الإزاحة بعد 10 ثواني من بدء الحركة

الحل:

a)

$$V(t)=\int a(t)\,dt=\int(4t+12)\,dt=2t^2+12t+c$$

$$90=2(16)+12(4)+c \implies 90=32+48+c \implies c=90-80 \implies c=10$$

$$V(t)=2t^2+12t+10 \implies V(2)=2(4)+12(2)+10=8+24+10=42\ \text{m/s}$$

b)

$$d=\int_1^2(2t^2+12t+10)\,dt=\left|\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_1^2\right|=$$

$$\left|\left(\frac{16}{3}+24+20\right)-\left(\frac{2}{3}+6+10\right)\right|$$

$$d=\left|\frac{16}{3}+44-\frac{2}{3}-16\right|=\left|\frac{14}{3}+28\right|=\frac{14+84}{3}=\frac{98}{3}\ \text{m}$$

(وردت النتيجة $\frac{96}{3}$ سهواً في الأصل والصحيح $\frac{98}{3}$).

c)

$$s=\int_0^{10}(2t^2+12t+10)\,dt=\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_0^{10}=\left(\frac{2000}{3}+600+100\right)-(0)$$

$$s=\frac{2000+1800+300}{3}=\frac{4100}{3}\ \text{m}$$

13): تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)$ m/s أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة إلى موضعها الأول الذي بدأت منه ثم إحسب التعجيل عندها.

وزاري تمهيدي 2007 د 2 | 2014 د 2 | 2016 د 2 | 2018 د 1 | 2024 د 3 محاولات

الحل:

$V(t) = 100t - 6t^2$ (نكامل الطرفين)

$$s = \int (100t - 6t^2)\, dt \implies s = 50t^2 - 2t^3 + c$$

∵ النقطة تتحرك من السكون $t = 0,\ s = 0$ ∴

$$0 = 50t^2 - 2t^3 + c \implies c = 0$$

$$\therefore s = 50t^2 - 2t^3$$

عند عودة النقطة إلى موضعها الأول يعني أن الإزاحة (s) تساوي صفر لذا يكون:

$$50t^2 - 2t^3 = 0 \implies t^2(50 - 2t) = 0$$

either $t^2 = 0 \implies t = 0$ (يهمل)

or $50 - 2t = 0 \implies 2t = 50 \implies t = 25$ sec الزمن اللازم لعودة النقطة إلى موضعها الأول

التعجيل: $a(t) = V'(t)$

$$a(t) = 100 - 12t$$

$$a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200 \text{ m/s}^2$$

الحجوم الدورانية

1. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ إلى $x = b$ حول محور السينات نطبق العلاقة:

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

2. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y = a$ إلى $y = b$ حول محور الصادات نطبق العلاقة:

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy$$

مثال: المنطقة المحددة بين المنحني $y=\sqrt{x},\ 0\le x\le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها.

وزاري د 1 خارج القطر 2011

الحل:

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int_0^4 x\,dx=\left[\pi\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi-0\pi=8\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

مثال: المنطقة المحددة بين المنحني $x=\frac{1}{\sqrt{y}},\ 1\le y\le 4$ دارت حول محور الصادات جد حجمها.

وزاري تمهيدي 2025

الحل:

$$V=\pi\int_1^4 x^2\,dy=\pi\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 dy=\pi\int_1^4\frac{1}{y}\,dy=\pi[\ln y]_1^4=\pi[\ln 4-\ln 1]=$$
$2\pi\ln 2$ وحدة مكعبة

مثال: جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $f(x)=x^2+1$ والمستقيم $y=4$ حول محور الصادات دورة كاملة.

وزاري د 1 2013 د 1 خارج القطر 2015 د 1 خارج القطر 2016

الحل:

ملاحظة: حول محور الصادات نأخذ مقاطع أفقية. نصف قطر كل قرص هو المسافة إلى المحور، أي $|x|$، لذلك نربّع x ونكامل بالنسبة إلى y.

نجد التقاطع مع y بوضع $x=0$:

$$y=0+1\implies y=1\quad,\quad[1,4]$$

$$V=\pi\int_1^4 x^2\,dy$$

$$y=x^2+1\implies x^2=y-1$$

$$V=\pi\int_1^4(y-1)\,dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_1^4=\pi\left[\left(\frac{16}{2}-4\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]=\frac{9}{2}\pi\ \text{unit}^3$$

مثال: أوجد حجم الشكل الناتج من دوران القطع المكافئ $x = 2y^2$ ومحور الصادات ضمن الفترة $y = 0,\ y = 2$.

الحل:

$$V = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_0^2 x^2\,dy \quad , \quad x = 2y^2 \xrightarrow{\text{بالتربيع}} x^2 = 4y^4$$

$$V = \pi \int_0^2 4y^4\,dy = 4\pi \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 = 4\pi \left[\frac{2^5}{5} - \frac{0}{5}\right] = 4\pi \left[\frac{32}{5}\right] = \frac{128\pi}{5}\ \text{unit}^3$$

مثال: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني.

وزاري 2011 د 2 | 2012 د 1 خارج القطر | 2014 تمهيدي | 2015 تمهيدي | 2018 د 3 | 2019 د 1 خارج القطر تطبيقي | 2025 د 2

الحل:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^2 8x\,dx = 4\pi[x^2]_0^2 = 4\pi[4 - 0] = 16\pi\ \text{unit}^3$$

مثال: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0, x = 5$ حول المحور السيني.

وزاري 2012 تمهيدي | 2019 تمهيدي

الحل:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^5 (2x^2)^2\,dx = 4\pi \int_0^5 x^4\,dx = 4\pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^5$$

$$V = \frac{4\pi}{5}[x^5]_0^5 = \frac{4\pi}{5}[5^5 - 0^5] = \frac{4\pi}{5}[3125 - 0] = 2500\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

مثال: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16, 0$ حول المحور الصادي.

وزاري 2017 تمهيدي

الحل:

$$V = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4}\,dy = \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{16} = \pi \left[\frac{16^2}{8} - 0\right] = 32\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

مثال: أوجد حجم المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $y = 1, y = 2$ ومحور الصادات دورة كاملة حول المحور الصادي.

وزاري د 3 2015

الحل:

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy \quad , \quad x = \frac{1}{y} \xrightarrow{\text{بالتربيع}} x^2 = \frac{1}{y^2}$$

$$V = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi \left[\frac{-1}{2} + 1\right] = \frac{\pi}{2} \text{ وحدة مكعبة}$$

حل تمارين (7 - 4)

س1: أوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1, x = 2$ حول المحور السيني.

الحل:

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_1^2 (x^2)^2\, dx = \pi \int_1^2 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right] = \frac{31}{5}\pi$$

س2: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y =$ 4 حول المحور الصادي.

وزاري د 1 2013 د 1 خارج القطر 2015 د 1 خارج القطر 2016

الحل:

$$x = 0 \implies y = 1$$

$$\because y = x^2 + 1 \implies x^2 = y - 1$$

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_1^4 (y - 1)\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^4 = \pi \left[(8 - 4) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] =$$

$$\pi \left[4 + \frac{1}{2}\right] = 4\frac{1}{2}\pi$$

س3: إحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x =$ 0 حول المحور الصادي.

الحل:

$$y^2 + x = 1 \implies x = 1 - y^2$$

$$x = 0 \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1 \quad \text{حدود التكامل}$$

$$V = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)^2\,dy = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2y^2 + y^4)\,dy$$

$$V = \pi \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right] = \pi \left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right]$$

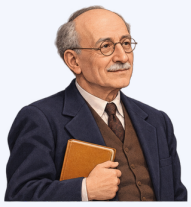
$$V = \frac{30 - 20 + 6}{15}\pi = \frac{16}{15}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

س4: أحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x =$ $0, x = 2$ حول المحور السيني.

وزاري 2014 د 2 | أسئلة الموصل 2017 د 1 | 2017 د 2

الحل:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^2 x^3\,dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \pi \left[\frac{16}{4} - 0 \right] = 4\pi \text{ وحدة مكعبة}$$



«ارجع إلى التعريفات.»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

حلول الأسئلة الوزارية حول التكامل

وزاري: جد ناتج:

1996 د 1

الحل

1. $\int (\sin x - 3\sec^2 x)\,dx = -\cos x - 3\tan x + c$

2. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_0^3 (1+x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3$

$= \left[2(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2(2^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(1)^{\frac{1}{2}}\right] = 4 - 2 = 2$

3. $\int \cos 6x \cos 3x\,dx = \int (1 - 2\sin^2 3x)\cos 3x\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \cos 3x\,(3)\,dx - 2\int \sin^2 3x \cos 3x\,dx$

$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^3 3x}{3} + c = \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + c$

وزاري: جد ناتج:

1996 د 2

الحل

$\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)\,dx$

$= \int (\sec^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx$

$= \tan x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c = \tan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

وزاري: جد ناتج:

1997 د1

الحل

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx = \int_4^8 x(x^2-15)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_4^8 2x(x^2-15)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-15)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^8 = \left[\frac{1}{3}\cdot(x^2-15)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$= \left[\frac{1}{3}(64-15)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{1}{3}(49)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{1}{3}(7^2)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = \frac{342}{3} = 114$$

وزاري: جد ناتج:

1997 د1

الحل

$$\int \cos 2x \sin^2 x\,dx = \int \cos 2x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$$

وزاري: جد ناتج:

2025 د2 2013 د2 1997 د2

الحل

$$\int (1+\cos 3x)^2\,dx = \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)\,dx$$

$$= \int dx + 2\int \cos 3x\,dx + \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x)\,dx$$

$$= x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

وزاري: جد ناتج:

د1 1998

الحل

$$\int (\cos x - \sin 2x)^2\,dx = \int (\cos^2 x - 2\cos x \sin 2x + \sin^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx - 2\int \cos x \cdot (2\sin x \cos x)\,dx + \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + 4\cdot\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

$$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

وزاري: س: إذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx = \frac{-9}{4}$ ما قيمة $a \in \mathbb{R}^+$؟

د1 1998

الحل:

$$\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx = \frac{-9}{4} \implies \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{a} = \frac{-9}{4} \implies \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{-9}{4}$$

$$\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-9}{4} \implies \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-9}{4} \xrightarrow{\times 4} 2a^2 - a^4 - 1 = -9$$

$$-a^4 + 2a^2 - 1 + 9 = 0 \implies -a^4 + 2a^2 + 8 = 0 \implies a^4 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2-4)(a^2+2) = 0 \implies (a^2-4) = 0 \implies a^2 = 4 \implies a = 2 \quad , \quad (a^2+2) = 0 \text{ (يهمل)}$$

وزاري: س: إذا كان $\int_a^b (2x+3)\,dx = 12$ وكان $a+2b=3$ ما قيمة $a,b \in \mathbb{R}$؟

د 2 1998

الحل:

$$a = 3-2b \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\int_a^b (2x+3)\,dx = 12 \implies [x^2+3x]_a^b = 12 \implies [b^2+3b]-[a^2+3a] = 12$$

$$b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b) = 12$$

$$b^2+3b-(9-12b+4b^2)-9+6b-12 = 0$$

$$b^2+3b-9+12b-4b^2-9+6b-12 = 0$$

$$[-3b^2+21b-30=0] \div -3 \implies b^2-7b+10=0$$

$$(b-5)(b-2)=0$$

either $b-2=0 \implies b=2 \implies a=3-2(2)=-1$

or $b-5=0 \implies b=5 \implies a=3-2(5)=-7$

وزاري: س: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=1-2\sin^2 x$ ومحور السينات وعلى $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

د 2 2025 | د 2 2018 | د 2 2016 | د 1 2006 | د 1 2001 | د 2 2000

الحل:

$$1-2\sin^2 x = 0 \implies \cos 2x = 0 \implies \left[2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \div 2 \implies x = \frac{\pi}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \ , \ \frac{3\pi}{4} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

الفترات: $\left[0,\frac{\pi}{4}\right] , \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0\right| + \left|\frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{2}(1)\right| = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \text{ unit}^2$$

وزاري: جد ناتج:

د 1 2001

الحل

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int [\sin x \cos x]^2 \, dx = \int \left[\frac{1}{2}(2 \sin x \cos x)\right]^2 dx = \int \left[\frac{1}{2} \sin 2x\right]^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x\right) + c$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

وزاري: جد ناتج:

د 2 2001

الحل

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9 - 12x + 4x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3 - 2x)^2} = \int_{-1}^{1} (3 - 2x)^{-2} \, dx = \frac{-1}{2} \int_{-1}^{1} (3 - 2x)^{-2} \cdot (-2) \, dx$$

$$= \left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{(3 - 2x)^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2(3 - 2x)}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2(1)}\right] - \left[\frac{1}{2(5)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5 - 1}{10} = \frac{2}{5}$$

وزاري: س: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3 - 9x$ ومحور السينات والفترة $[-3, 3]$؟

د 1 2001 تمهيدي 2006 د 1 2015

الحل:

$$x^3 - 9x = 0 \implies x(x^2 - 9) = 0 \implies \text{either } x = 0 \quad \text{or } x^2 - 9 = 0 \implies x^2 = 9$$

$$x = \pm 3 \in [-3, 3]$$

$$A = \left|\int_{-3}^{0} (x^3 - 9x) \, dx\right| + \left|\int_{0}^{3} (x^3 - 9x) \, dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|$$

$$= \left|[0] - \left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right]\right| + \left|\left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right] - [0]\right|$$

$$= \left|\frac{-81}{4} + \frac{81}{2}\right| + \left|\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right| = \left|\frac{-81 + 162}{4}\right| + \left|\frac{81 - 162}{4}\right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{162}{4} = 40\frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

وزاري: س: جد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)\,dx$.

د1 2001

الحل:

$$= \int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(2x+5)\,dx = \left[\frac{(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3}(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(16+20)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{2}{3}(6^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(216) = \frac{432}{3} = 144$$

وزاري: س: جد المساحة المحددة لمنحني الدالتين $y = x^4 - 4$ ، $y = 3x^2$.

د1 2002 د2 2002

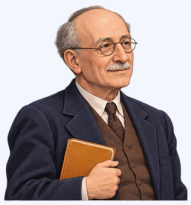
الحل:

$$x^4 - 4 = 3x^2 \implies h(x) = x^4 - 3x^2 - 4 \implies x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2-4)(x^2+1) = 0 \implies (x^2-4) = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] - \left[\frac{-32}{5} + 8 + 8\right]\right| = \left|\frac{64}{5} - 32\right| = \frac{96}{5}\ \text{unit}^2$$



«تحقّق من كلّ خطوة أثناء تنفيذ خطة الحل.»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

وزاري: س: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^2$ ، $y = 2x$ وعلى $[1, 3]$.

د1 2002

الحل:

$$h(x) = x^2 - 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \notin [1,3] \quad \text{or} \quad x - 2 = 0 \implies x = 2$$

$$\therefore A = \left|\int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx\right| + \left|\int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3\right|$$

$$= \left|\left[\frac{8}{3} - 4\right] - \left[\frac{1}{3} - 1\right]\right| + \left|[9 - 9] - \left[\frac{8}{3} - 4\right]\right|$$

$$= \left|\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right| + \left|-\frac{8}{3} + 4\right| = \left|\frac{7}{3} - 3\right| + \left|\frac{-8+12}{3}\right| = \left|\frac{7-9}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} =$$

2 unit^2

وزاري: س: إذا كان $\int_h^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$ جد قيمة h.

د1 2004

الحل:

$$\int_h^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2 \implies \int_h^4 x(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2$$

$$\frac{1}{2}\int_h^4 2x(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2 \implies \left[\frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_h^4 = 2$$

$$\left[(16+9)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[(h^2+9)^{\frac{1}{2}}\right] = 2 \implies (5^2)^{\frac{1}{2}} - (h^2+9)^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$(h^2+9)^{\frac{1}{2}} = 5 - 2 \implies (h^2+9)^{\frac{1}{2}} = 3 \xrightarrow{\text{بالتربيع}}$$

$$h^2 + 9 = 9 \implies h^2 = 0 \implies \therefore h = 0$$

وزاري: جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(5-2x)^2}$

د 1 2006

الحل:

$$\int_1^2 (5-2x)^{-2}\,dx = \frac{-1}{2}\int_1^2 (5-2x)^{-2}(-2)\,dx = \left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{(5-2x)^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{2(5-2x)}\right]_1^2 = \left[\frac{1}{2(5-4)}\right] - \left[\frac{1}{2(5-2)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

وزاري: جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$

د 2 2006

الحل:

$$= \int_1^2 (3x-4)^{-2}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 (3x-4)^{-2}\cdot 3\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-4)^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{-1}{3(3x-4)}\right]_1^2 = \left[\frac{-1}{3(6-4)}\right] - \left[\frac{-1}{3(3-4)}\right] = \frac{-1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

وزاري: س: إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx = 5$ ، $\int_c^b f(x)\,dx = 3$ وكانت $c \in [a,b]$ جد قيمة $\int_a^c f(x)\,dx$.

د 1 2008

الحل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \implies 5 = \int_a^c f(x)\,dx + 3$$

$$\therefore \int_a^c f(x)\,dx = 5-3 \implies \int_a^c f(x)\,dx = 2$$

وزاري: جد $\int \cos^2 2x \sin x \, dx$

د 1 2008 د 2 2008

الحل:

$$= \int (2\cos^2 x - 1)^2 \sin x \, dx = \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) \sin x \, dx$$

$$= -4 \int \cos^4 x(-\sin x) \, dx + 4 \int \cos^2 x \cdot (-\sin x) \, dx + \int \sin x \, dx$$

$$= -4\frac{\cos^5 x}{5} + 4 \cdot \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c = \frac{-4}{5}\cos^5 x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x + c$$

وزاري: س: جسم يتحرك بسرعة $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ في أي زمن t احسب:

د 1 2009 د 2 2024

1. المسافة المقطوعة خلال الفترة $[0, 2]$.
2. الزمن الذي يصبح فيه التعجيل 18 m/min^2.

الحل:

1. $[3t^2 - 12t + 9 = 0] \div 3 \implies t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t-3)(t-1) = 0$

either $t - 3 = 0 \implies t = 3 \notin [0, 2]$

or $t - 1 = 0 \implies t = 1 \in [0, 2]$

$$\therefore d = \left| \int_0^1 (3t^2 - 12t + 9) \, dt \right| + \left| \int_1^2 (3t^2 - 12t + 9) \, dt \right|$$

$$= \left| [t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1 \right| + \left| [t^3 - 6t^2 + 9t]_1^2 \right|$$

$$= |[1 - 6 + 9] - [0]| + |[8 - 24 + 18] - [1 - 6 + 9]|$$

$$= |4| + |2 - 4| = 4 + 2 = 6 \text{ m}$$

2. $a(t) = V'(t) = 6t - 12$

$18 = 6t - 12 \implies 6t = 18 + 12 \implies 6t = 30 \implies t = 5 \text{ min}$

وزاري: جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$

د 2 2008 د 2 2009

الحل

$$= \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}\,dx = \int_3^8 \frac{x}{x(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_3^8 (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_3^8 = \left[2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8 = \left[2(8+1)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(3+1)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \left[2(3^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(2^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 6 - 4 = 2$$

وزاري: جد المساحة المحددة بين المنحنيين $y = \cos^2 x$ ، $y = \sin^2 x$ في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

د 2 2009

الحل:

$$h(x) = \cos^2 x - \sin^2 x \implies h(x) = \cos 2x$$

$$\cos 2x = 0 \implies \left[2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \div 2 \implies \therefore x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\sin 0\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin\pi\right] - \left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ وحدة مربعة}$$

وزاري: س: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث سرعته $v = 3t^2 + 4t + 7$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها علماً أن المسافة تقاس بالأمتار.

2010

الحل:

$$3t^2 + 4t + 7 > 0$$

$$d = \int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)\, dt = [t^3 + 2t^2 + 7t]_0^4 = (64 + 32 + 28) - 0 = 124 \text{ m}$$

$$a(t) = V'(t) = 6t + 4 \implies a(4) = 6(4) + 4 = 28 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

وزاري: س: جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = (x-1)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 3]$.

2012 د1

الحل:

$$(x-1)^3 = 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1 \in [-1, 3]$$

$$A = \left| \int_{-1}^{1} (x-1)^3\, dx \right| + \left| \int_{1}^{3} (x-1)^3\, dx \right|$$

$$= \left| \left[0 - \frac{(-2)^4}{4} \right] \right| + \left| \left[\frac{2^4}{4} - 0 \right] \right| = |-4| + |4| = 8 \text{ وحدة مساحة}$$

وزاري: س: جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين $y = x^2 + 1$ والمستقيمين $y = 2, y = 1$ حول المحور الصادي.

2012 د1

الحل:

$$v = \pi \int_a^b x^2\, dy \implies \pi \int_1^2 (y-1)\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{4}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \pi \left[(2-2) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2} \text{ وحدة مكعبة}$$

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الرابع

س13 / جد تكاملات كل مما يأتي:

الحل

a) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$

وزاري د1 خارج القطر 2017

$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$ (نحلل فرق بين مربعين)

$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x}$, $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$= \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot (2)\,dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$

b) $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\,dx$

$= \int (\sin 2x \cos^2 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2)\,dx$ (نوزع ونرتب)

$= \int \left[(\cos 2x)^2 \sin 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2\right] dx$

$\boxed{\text{المشتقة} = -2\sin 2x}$, $\boxed{\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)}$

$= \int \left[-\frac{1}{2}(\cos 2x)^2 \cdot (-2\sin 2x) + 2\sin 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - 2\right] dx$

$= -\frac{1}{2}\frac{(\cos 2x)^3}{3} - 2\frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) - 2x + c$

$= -\frac{(\cos 2x)^3}{6} - \cos 2x - \frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8} - 2x + c$

$= -\frac{(\cos 2x)^3}{6} - \cos 2x - \frac{5}{2}x - \frac{\sin 4x}{8} + c$

(وردت إشارة $\frac{\sin 4x}{8}$ موجبة سهواً في الأصل والصحيح سالبة).

c) $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{\text{الدالة}} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + c$

متابعة الحل

س13 / جد تكاملات كل مما يأتي:

d) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ (بدون أس فيمكن أن نكامل مباشرة ولكن علينا أن نرتب $\sin$ ∵)

$$= 2\int \frac{\sin x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = 2\int \sin x^{\frac{1}{3}}\, x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

مشتقة الزاوية $= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$$= 3\cdot 2\int \sin x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = 6\left(-\cos x^{\frac{1}{3}}\right)+c = -6\cos\sqrt[3]{x}+c$$

(وردت النتيجة $-6\sin\sqrt[3]{x}+c$ سهواً في الأصل والصحيح $-6\cos\sqrt[3]{x}+c$.)

e) $\int \cot x\csc^3 x\,dx$

وزاري 2012 د 2

$$= \int (\csc x)^3\cot x\,dx$$ (علينا أن نفكك $(\csc x)^3$)

المشتقة $= -\csc x\cdot\cot x$

$$= -\int (\csc x)^2(-\csc x\cdot\cot x)\,dx = -\frac{(\csc x)^3}{3}+c$$

f) $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx$

وزاري 2019 د 1 تطبيقي

$$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\,dx = \int x\sqrt[3]{3-5x^2}\,dx$$

$$= \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}x\,dx = -\frac{1}{10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}(-10x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c = -\frac{3}{40}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}+c$$

g) $\int \frac{1}{x^2-14x+49}\,dx$ (نحلل المقام مربع كامل)

$$\int \frac{1}{(x-7)^2}\,dx = \int (x-7)^{-2}\,dx = \frac{(x-7)^{-1}}{-1}+c = \frac{1}{-(x-7)}+c$$

متابعة الحل

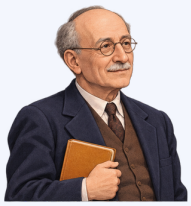
س13 / جد تكاملات كل مما يأتي:

h) $\int \sec^2 3x \cdot e^{\tan 3x}\, dx = \int e^{\tan 3x} \cdot \sec^2 3x\, dx = \frac{1}{3}\int e^{\tan 3x} \cdot (3\sec^2 3x)\, dx = \frac{1}{3}e^{\tan 3x} + c$

وزاري تمهيدي 2018 د 1 2019 د 1 محاولات تطبيقي 2024

تذكير ببعض قوانين الدوال المثلثية

القانون (1)	القانون (2)	القانون (3)
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$	$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$
$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$	$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$	$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$



«حاول أن تفكّر في مسألة مألوفة لها المجهول نفسه أو مجهول مشابه.»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

تدريب وزاري مختار

المجاميع العليا والسفلى

سؤال 1 لتكن $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3x - 2$، جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^5 f(x)\,dx$ إذا تجزأت الفترة إلى الفترات $[1,2], [2,3], [3,5]$.

وزاري د 3 2019

الحل

- الفترات الجزئية هي $[1,2], [2,3], [3,5]$.
- $f'(x) = 3 > 0$، الدالة متزايدة ولا توجد نقاط حرجة.

الفترة الجزئية $[a,b]$	h_i	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	7	4	7
$[3,5]$	2	7	13	14	26
المجموع				$L(\sigma, f) = 19$	$U(\sigma, f) = 37$

$$\int_1^5 (3x-2)\,dx = \frac{19+37}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

التكامل المحدد وخواصه

سؤال 2 جد قيمة التكامل: $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5}\,dx$.

وزاري د 2 2003 د 1 خارج القطر 2015

الحل

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)}\,dx = \int_{-1}^{1} x(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{3}}(-4x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1} = -\frac{3}{16}\left[(1)^{\frac{4}{3}} - (1)^{\frac{4}{3}}\right] = 0$$

سؤال 3 إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-3,5]$ وكان $\int_1^5 f(x)\,dx = 12$ و $\int_{-3}^5 [f(x) + 2x]\,dx = 54$، فجد $\int_{-3}^1 f(x)\,dx$.

وزاري د 1 2024 د 1 محاولات أحيائي 2024

الحل

$$\int_{-3}^5 f(x)\,dx + \left[x^2\right]_{-3}^5 = 54 \implies \int_{-3}^5 f(x)\,dx + (25-9) = 54 \implies \int_{-3}^5 f(x)\,dx = 38$$

$$\int_{-3}^5 f(x)\,dx = \int_{-3}^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx \implies 38 = \int_{-3}^1 f(x)\,dx + 12 \implies \int_{-3}^1 f(x)\,dx = 26$$

التكامل غير المحدد

سؤال 4 جد قيمة التكامل: $\int x^5 \left(\frac{2}{x} - 3x\right)^4 dx$.

وزاري د 3 أحيائي 2023

الحل

$$\int x^5 \left(\frac{2-3x^2}{x}\right)^4 dx = \int x(2-3x^2)^4\,dx = -\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^4(-6x)\,dx = -\frac{1}{30}(2-3x^2)^5 + C$$

تكامل الدوال المثلثية

سؤال 5 جد تكامل: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

وزاري د 2 أحيائي 2023

الحل

$$\int \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \sin(\ln x) + C$$

سؤال 6 جد قيمة التكامل: $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\, dx$.

وزاري د 1 2025

الحل

$$\int \left(\frac{\sec^3 x}{\sec x} + \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\right) dx = \int \left(\sec^2 x + e^{\sin x}\cos x\right) dx = \tan x + e^{\sin x} + C$$

مساحة المنطقة المستوية

سؤال 7 إذا كان لمنحني الدالة $y = ax^3 + bx$ نهاية عظمى محلية هي $(-1, 2)$، جد $a, b \in \mathbb{R}$، ثم احسب المساحة المحددة بين هذا المنحني ومحور السينات.

وزاري د 1 أحيائي 2023

الحل

- **أولاً: إيجاد** a, b: بما أن $(-1, 2)$ نقطة نهاية عظمى فهي تحقق الدالة وتجعل $y'(-1) = 0$:

$$2 = a(-1)^3 + b(-1) \implies -a - b = 2 \quad \dots(1)$$

$$y' = 3ax^2 + b \implies 3a(-1)^2 + b = 0 \implies 3a + b = 0 \quad \dots(2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2): $2a = 2 \implies a = 1$، وبالتعويض نجد $b = -3$. إذن معادلة المنحني هي: $y = x^3 - 3x$.

- **ثانياً: حساب المساحة:**

$$x^3 - 3x = 0 \implies x(x^2 - 3) = 0 \implies x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$$

$$A = \left|\int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\, dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{3}}\right|$$

$$= \left|0 - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) - 0\right| = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}\ \text{unit}^2$$

سؤال 8 جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^4 - 8$، $y = 2x^2$.

وزاري تمهيدي 2012

الحل

$$h(x) = x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \implies (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \implies x = \pm 2$$

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - 2x^2 - 8)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 16 \right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 16 \right) \right| = \left| \frac{64}{5} - \frac{32}{3} - 32 \right| = \left| \frac{192 - 160 - 480}{15} \right| = \frac{448}{15} \text{ unit}^2$$

المسافة والإزاحة

سؤال 9 جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t - 6)$ m/s، جد:

وزاري د 2 تطبيقي 2019

1) المسافة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$.

2) الإزاحة المقطوعة في الثانية الخامسة.

3) بعده بعد مضي 4 ثوانٍ من بدء الحركة.

الحل

1. $v(t) = 3t - 6 = 0 \implies t = 2 \in [1, 3]$.

$$d = \left| \int_{1}^{2} (3t - 6)\, dt \right| + \left| \int_{2}^{3} (3t - 6)\, dt \right| = \left| \left[\frac{3t^2}{2} - 6t \right]_{1}^{2} \right| + \left| \left[\frac{3t^2}{2} - 6t \right]_{2}^{3} \right|$$

$$= \left| -6 - \left(-\frac{9}{2} \right) \right| + \left| -\frac{9}{2} - (-6) \right| = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \text{ m}$$

2. الإزاحة في الثانية الخامسة $[4, 5]$:

$$s = \int_{4}^{5} (3t - 6)\, dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 6t \right]_{4}^{5} = \left(\frac{75}{2} - 30 \right) - (24 - 24) = \frac{15}{2} \text{ m}$$

3. البعد بعد 4 ثوانٍ:

$$s = \int_{0}^{4} (3t - 6)\, dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 6t \right]_{0}^{4} = 24 - 24 = 0 \text{ m}$$

الحجوم الدورانية

سؤال 10 جد الحجم الناتج من دوران الدائرة $x^2 + y^2 = 9$ حول محور السينات ومركزها نقطة الأصل.

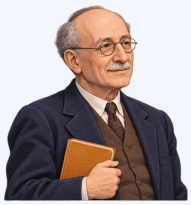
وزاري د 1 تطبيقي 2017

الحل

$$y^2 = 9 - x^2$$

، وعند تقاطعها مع محور السينات $x = \pm 3 \implies y = 0$.

$$V = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = \pi \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{3} = \pi[(27 - 9) - (-27 + 9)] = 36\pi \text{ unit}^3$$



«هل يمكنك أن تكتب أجزاء الشرط كلًّا على حدة؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟