4 التكامل

نسخة بدون أجوبة



بداية الرحلة

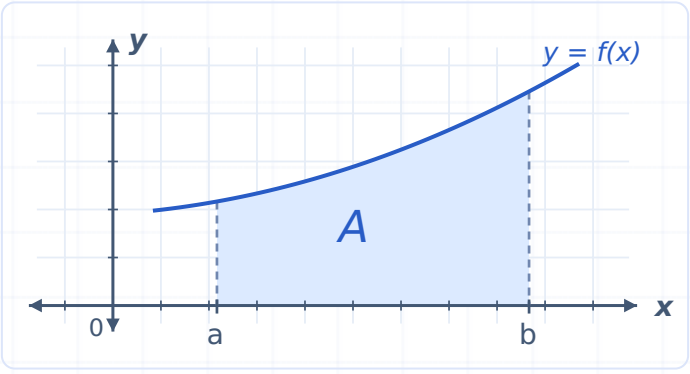
خطوة صغيرة بالفهم، خطوة كبيرة بالحل.

المناطق المحددة بمنحنيات

هناك مناطق مستوية يمكن إيجاد مساحتها مثل المستطيل، المثلث، شبه المنحرف، الدائرة .. إلخ. ولكن هناك أشكال تسمى مناطق مضلعة لا يمكن إيجاد مساحتها إلا بتقسيمها إلى مناطق مثلثة أو مربعة أو مستطيلة .... إلخ.

أما المنطقة A والتي تسمى منطقة تحت المنحني f وهي مجموعة النقاط المحصورة بين المنحني (بيان الدالة f) والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ (وردت في الأصل $y = b$) ومحور السينات فلا يمكن تقسيمها إلى مناطق معلومة (مثلث، مستطيل، دائرة .... إلخ).

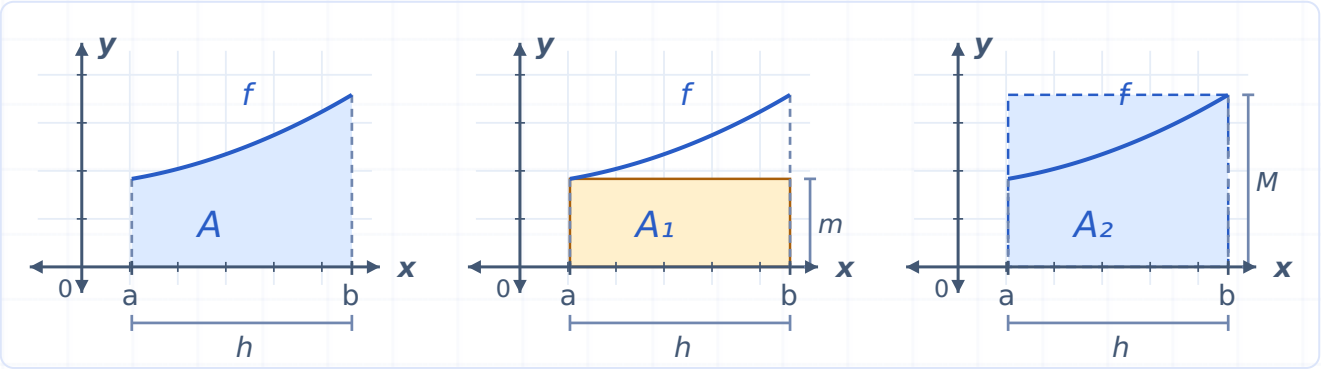
لذلك كيف يمكن حساب مساحتها؟



شكل توضيحي: المنطقة المحصورة بين المنحني f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ و $x = b$.

إيجاد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المستوية

إذا كانت f دالة (منحني) وكانت (A) المنطقة المحصورة بينها وبين الإحداثي السيني في الفترة $[a, b]$ كما هو مبين في الشكل أدناه، فيمكننا إيجاد مساحة المنطقة (A) المحددة بالرسم.



أشكال توضيحية: المنطقة A، والمستطيل الداخلي A_1 بارتفاع m، والمستطيل الخارجي A_2 بارتفاع M وعرض h.

ملاحظات:

1. نرسم مستطيلاً من أدنى نقطة في المنحني ضمن الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز (A_1).
2. نرسم مستطيلاً من أعلى نقطة في المنحني ضمن الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز (A_2).
3. نوجد مساحة المنطقتين المستطيلتين (A_1) و (A_2).
4. المطلوب هو حساب القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A بالاعتماد على القانون:

$$A \approx \frac{A_1 + A_2}{2}$$

5. مساحة أي منطقة هي عدد حقيقي غير سالب.
6. $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ ، مساحة $A_1 \leq$ مساحة $A \leq$ مساحة A_2.
7. نرمز لارتفاع المستطيل الصغير A_1 بالرمز m حيث $m = f(a)$.
8. نرمز لارتفاع المستطيل الكبير A_2 بالرمز M حيث $M = f(b)$.

مثال: أوجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A حيث:

$$A = \{(x,y),\ 2 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq f(x),\ f(x) = \sqrt{x-1}\}$$

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث:

$$A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2,\ f(x) = x^2 + 1\}$$

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3,\ f(x) = x^2 + 1\}$.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 5,\ f(x) = 3x^2 - 2\}$.

مساحة المنطقة المستوية بدقة أكبر

1. نجزئ الفترة المعطاة $[a, b]$ إلى فترات حسب الطلب وليكن عدد الفترات هو (n) وبذلك يكون طول الفترة:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

حيث يرمز للأعداد من $(1, 2, \ldots, n)$ بالرمز σ (سكما) حيث أن $\sigma = (1, 2, 3, \ldots, n)$.

2. نحسب مساحة أكبر منطقة مستطيلة داخل A حيث تساوي $(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)$.
3. نحسب مساحة أصغر منطقة مستطيلة داخل A حيث تساوي $(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \cdots + \overline{A}_n)$.

4. نجد مساحة المنطقة A حسب القانون التالي:

$$A = \frac{\sum A_n + \sum A'_n}{N}$$

ونلاحظ أنه كلما زادت عدد نقاط التجزئة فإن المحصلة النهائية تقل وتصبح القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A أكثر دقة.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة $A = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 5,\ y = x^2 + 1\}$ وذلك باستخدام التجزئة:

1. $\sigma_1 = (2, 3, 5)$

2. $\sigma_2 = (2, 3, 4, 5)$

واجب **H.W**

أوجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A باستخدام التجزئة:

$$A = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 5,\ y = x^2 - 3\}$$

a) $\sigma_1 = (2,3,5)$

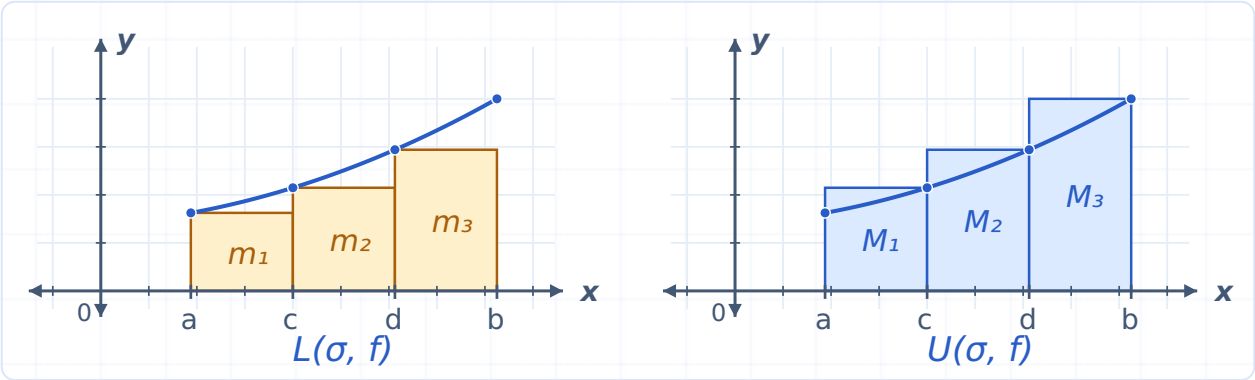
b) $\sigma_2 = (2,3,4,5)$

المجاميع العليا والمجاميع السفلى

- يرمز للمجاميع العليا $U(\sigma, f)$
- يرمز للمجاميع السفلى $L(\sigma, f)$

$$U(\sigma, f) \geq L(\sigma, f)$$

- سنعتبر الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ حيث يمكن أن تكون الدالة متزايدة أو متناقصة أو تحتوي على نقطة حرجة.
- إذا كانت التجزيئات متساوية والدالة هي عبارة عن ثابت في هذه الحالة يتساوى المجموع الأعلى مع المجموع الأسفل.
- إذا أردنا استخراج m نعوض الرقم الأصغر لبداية الفترة وإذا أردنا استخراج M نعوض الرقم الأكبر الذي تنتهي به الفترة.
- في حالة احتواء الفترة الجزئية على نقطة حرجة نحسب قيم بداية الفترة ونهايتها وقيمة النقطة الحرجة وتكون القيمة الصغيرة هي m والقيمة الأكبر هي M.
- إذا لم نشترط أن تكون $f(x) \geq 0$ فإن من المتوقع ظهور المجموعة السفلى عدد موجب أو سالب أو صفر وبالمثل للمجموعة العليا.



شكل توضيحي لتجزئة الفترة $[a,b]$ إلى ثلاث فترات جزئية وحساب المجاميع العليا والسفلى.

مثال: لتكن $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=5+2x$ جد المجموع الأسفل $L(\sigma,f)$ والمجموع الأعلى $U(\sigma,f)$.

وزاري د 1 أسئلة النازحين 2014

نتبع ما يلي لحل هذه الأسئلة:

1. تجزأ الفترة (ويفضل أن تكون منتظمة).
2. نشتق الدالة ونساوي المشتقة للصفر فإذا كان الجواب عدداً ثابتاً فإذا كانت موجبة فالدالة متزايدة وإذا كانت سالبة فهي متناقصة، أما إذا حصلنا على قيمة (x) نستخدم الاختبار للإشارة (الطريقة السابقة) ونجد هل هي متزايدة أو متناقصة. وبطريقة أخرى نشتق المشتقة الثانية فإذا كان الناتج موجباً فإن النهاية تكون صغرى وعندها نكتب القيمة المؤجلة في m ثم نعوض طرفي الفترة المؤجلة ثم نختار أكبر الناتجين ليكون في حقل M، أما إذا كانت المشتقة الثانية سالبة فتكون النهاية عظمى محلية وعندها نكتب القيمة المؤجلة M ثم نعوض طرفي الفترة المؤجلة ونختار أصغر الناتجين ونضعه في حقل m.
3. نكتب الجدول وهو ثابت لا تتغير حقوله.
4. ننتبه إلى ما يلي: إذا كانت الدالة متزايدة فإنه m_i حيث m هي (أصغر قيمة للدالة) تأخذ $f(a)$ وكذلك للدالة المتزايدة فإن M_i حيث M هي (أكبر قيمة للدالة) تأخذ $f(b)$.

مثال: إذا كانت $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3x - x^2$ أوجد كل من $L(\sigma, f)$ ، $U(\sigma, f)$ ، مستخدماً أربعة تجزيئات منتظمة.

وزاري د 2 خارج القطر 2017 تمهيدي 2019

لاحظ أن: $L(\sigma, f) \leq U(\sigma, f)$.



«جمال الرياضيات لا يتجلّى إلا لمن يصبر عليها.»

مريم ميرزاخاني

مقابلة مع معهد كلاي للرياضيات

تمارين (1 - 4)

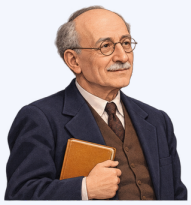
س1 / أوجد كل من $L(\sigma, f)$ ، $U(\sigma, f)$ **لكل مما يأتي:**

1) $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3 - x$

a) $\sigma = (-2, 0, 1)$

وزاري د 1 خارج القطر 2012

• b) تقسيم الفترة $[-2, 1]$ إلى ثلاث فترات جزئية منتظمة.



«إذا تعذّر عليك حلّ المسألة، فجرّب أولًا حلّ مسألة قريبة منها.»

جورج بوليا

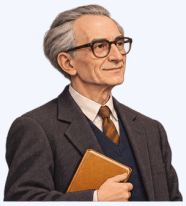
كيف تحلّها؟

س2 / إذا كان $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 4x - x^2$ ، $\sigma = (0,1,2,3,4)$

وزاري تمهيدي 2018

صيغة أخرى للسؤال

جد $L(\sigma, f)$ و $U(\sigma, f)$ للدالة $f(x) = 4x - x^2$، حيث $f : [0,4] \to \mathbb{R}$، باستخدام أربع تجزيئات منتظمة.



«الطريقة الوحيدة لتعلّم الرياضيات هي ممارستها.»

بول هالموس

كتاب مسائل فضاء هيلبرت

س3 / $f(x) = 3x^2 + 2x$ ، $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$

a) $\sigma = (1, 2, 4)$

• b) استخدم ثلاث تجزيئات متساوية.

تعريف التكامل

إذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد k بحيث لأي تجزئة (σ) في الفترة $[a, b]$ فإن:

$$L(\sigma, f) \leq K \leq U(\sigma, f)$$

نسمي العدد K **التكامل المحدد** للدالة (f) على الفترة $[a, b]$ ونرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ ويُقرأ التكامل من a إلى b للدالة (f) ونسمي a, b حدي التكامل.

ملاحظات:

1. إذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإن $\left\{L(\sigma,f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(\sigma,f)\right\}$ وتكون القيمة التقريبية لهذا التكامل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

2. إذا كانت الدالة $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يعطي مساحة المنطقة A تحت المنحني f وهو عدد غير سالب، dx تشير إلى أن حدي التكامل، أما a,b قيمتان للمتغير x.

3. إذا كانت الدالة $f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ وهذا لا يدل على المساحة، أما مساحة المنطقة A فهي ستساوي:

$$-\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

4. أن قيمة $\int_a^b f(x)\,dx$ تتوقف على الفترة $[a,b]$ وعلى قيمة $f(x)$.

مثال: لتكن $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=x^2$ ، أوجد قيمة تقريبية للتكامل إذا جزئت الفترة $[1,3]$ إلى تجزئتين.

وزاري 2016 د 2 خارج القطر 2017 د 1 2019 د 2

«الجبر هندسة مكتوبة، والهندسة جبر مرسوم.»

صوفي جيرمان
الأعمال الفلسفية



مثال: لتكن $f : [2,5] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 2x - 3$ ، أوجد $\int_2^5 f(x)\,dx$.

جزء من السؤال الوزاري د 3 2017

ملاحظة: في التكامل إذا لم يذكر عدد التجزئة يمكن أخذ تجزئة منتظمة. **ملاحظة:** في الدالة الثابتة يكون $m_i = M_i$ لكل الفترات ويكون $L(\sigma, f) = U(\sigma, f)$ لكل فترة جزئية ولكل تجزئة.

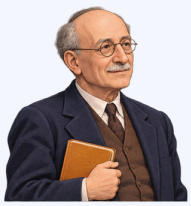
مثال: لتكن $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3$ ، أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 f(x)\,dx$.

جزء من السؤال الوزاري تمهيدي 2017

«هل يمكنك الوصول إلى النتيجة بطريقة أخرى؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟



تمارين (2 - 4)

س1: أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$.

وزاري د 1 خارج القطر 2011 د 2 تطبيقي 2018

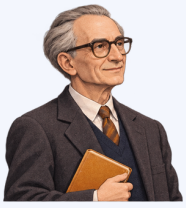
س2: لتكن $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3x - 3$ أوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ ثم تحقق هندسياً بحساب المنطقة تحت المنحني للدالة f.

وزاري تمهيدي خارج القطر 2014 د 1 2018

س3: أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_2^4 (3x^2 - 3)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2, 3, 4)$.

وزاري د 1 أسئلة النازحين 2015 د 3 2015 د 2 2024

س4: أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ حيث أن $f(x) = -4$.



«اطرح أسئلتك، وابحث عن أمثلتك الخاصة، واكتشف براهينك بنفسك.»

بول هالموس

أريد أن أكون عالم رياضيات

س5: أوجد قيمة التكامل $\int_1^5 x^3\,dx$ باستخدام أربعة تجزيئات ممكنة.

وزاري د 1 خارج القطر 2014

أمثلة إضافية

مثال: لتكن $f(x) = 3x^2 - 4x$ ولتكن $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ أوجد قيمة تقريبية للتكامل باستخدام التجزئة $\sigma = (0,1,2,3)$ أو باستخدام ثلاث تجزئات متساوية.

النظرية الأساسية للتكامل

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

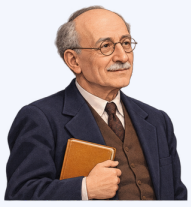
حيث تسمى F **الدالة المقابلة** للدالة f على الفترة $[a,b]$.

مثال: إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي $F:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ ، $F(x)=\sin x$ فأوجد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

وزاري د 2 خارج القطر 2017

مثال: إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ بحيث $F(x)=3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد قيمة $\int_1^5 f(x)\,dx$.

مثال: أثبت فيما إذا كانت $F(x)=x^3+2$ ، $F:[1,3]\to\mathbb{R}$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=3x^2$.



«ارسم شكلًا، واختر رموزًا مناسبة.»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

مثال: أثبت أن الدالة $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ هي دالة مقابلة للدالة $f : \mathbb{R} \to$ ، $f(x) = \cos 2x$ على $\mathbb{R}$ ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$.

وزاري تمهيدي 2020 د 2 2020

الجدول التالي يوضح العلاقة بين f والدالة المقابلة لها F

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(x)$
a	ax
$x^n \ , \ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n \ , \ n \neq -1$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n \cdot f'(x) \ , \ n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$
$\sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$\csc^2(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cot(ax+b)$
$\sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a}\sec ax$
$\csc ax \cot ax$	$\frac{-1}{a}\csc ax$

لذا نستنتج أن $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ حيث أن c ثابت حقيقي.

ملاحظة: أي نضيف إلى الأس واحد ونقسم على الأس الجديد:

$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

مثال: أوجد $\int_1^3 x^3\,dx$

مثال: أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x\,dx$

وزاري تمهيدي تطبيقي 2021 د 1 تطبيقي 2021

مثال: أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx$

مثال: أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

وزاري تمهيدي تطبيقي 2019

مثال: أوجد $\int_1^2 x^2\,dx$

خواص التكامل المحدد

1) إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

2) إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $f(x) \le 0,\ \forall x \in [a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le 0$$

3) الثابت (العدد) يستخرج خارج التكامل: إذا f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، $\forall x \in [a,b]$ ، وكان c عدد حقيقي ثابتاً فإن:

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: إذا كان $\int_2^5 f(x)\,dx = 8$ فأوجد $\int_2^5 5\,f(x)\,dx$.

4) إذا كانت دالتان f_1, f_2 مستمرتين على الفترة $[a,b]$:

$$\int_a^b (f_1 \mp f_2)\,dx = \int_a^b f_1\,dx \mp \int_a^b f_2\,dx$$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع أي عدد محدد من الدوال المستمرة على فترة $[a,b]$.

مثال: إذا كانت $\int_1^3 f_1(x)\,dx = 15$ ، $\int_1^3 f_2(x)\,dx = 17$ فأوجد كلاً من:

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))\,dx \quad , \quad \int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))\,dx$$

مثال: إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$.

5) إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: إذا كانت $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ ، $\int_3^7 f(x)\,dx = 8$ فأوجد $\int_1^7 f(x)\,dx$.

مثال: لتكن $f(x) = |x|$ أوجد $\int_{-3}^4 f(x)\,dx$.

وزاري د 1 2011

صيغة أخرى للسؤال

جد قيمة التكامل: $\int_{-3}^4 |x|\,dx$.

مثال: إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \forall x \geq 1 \\ 3 & \forall x < 1 \end{cases}$ فأوجد $\int_0^5 f(x)\,dx$.

وزاري تمهيدي أحيائي 2023

6) إذا كان:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

مثال: أوجد $\int_3^3 x\,dx$

مثال: أوجد $\int_3^2 3x^2\,dx$

مثال: لتكن $f(x) = |x-2|$ أوجد $\int_0^4 f(x)\,dx$.

مثال: إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ x+2 & x < 2 \end{cases}$ أوجد $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

مثال: إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & x \geq 1 \\ 6x - 1 & x < 1 \end{cases}$ أوجد $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

تمارين (3 - 4)

س1: أحسب كلاً من التكاملات الآتية:

a)

$$\int_{-2}^{2} (3x - 2)\,dx$$

b)

$$\int_{1}^{2} (x^{-2} + 2x + 1)\,dx$$

متابعة السؤال

س1: أحسب كلاً من التكاملات الآتية:

c)

$$\int_1^3 (x^4 + 4x)\,dx$$

d) $\int_0^2 |x-1|\,dx$

وزاري د 2 2017 د 2 أحيائي 2023

e)

وزاري د 1 أحيائي 2023

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x + \cos x)\,dx$$

متابعة السؤال

س1: أحسب كلاً من التكاملات الآتية:

f)

وزاري د 4 أسئلة النازحين 2015 تمهيدي 2018 تمهيدي أحيائي 2023

$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$$

g)

وزاري تمهيدي تطبيقي 2020 د 2 تطبيقي 2020

$$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$$



«كلّما قضيت وقتًا أطول مع الرياضيات، ازددت حماسًا لها.»

مريم ميرزاخاني

مقابلة مع معهد كلاي للرياضيات

س2: أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث $F : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \sin x + x$ و $f : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 1 + \cos x$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$.

وزاري د1 2020 تمهيدي تطبيقي 2021 تمهيدي 2025

س3: أوجد كل من التكاملات التالية:

a)

$$\int_1^4 (x-2)(x+1)^2\,dx$$

b) $\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx$

متابعة السؤال

س3: أوجد كل من التكاملات التالية:

c)

$$\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}\,dx$$

d)

وزاري د 2 أسئلة الموصل 2017

$$\int_0^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\,dx$$

س4: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & \forall x \geq 3\\ 6 & \forall x < 3\end{cases}$ فأوجد $\int_1^4 f(x)\,dx$.

وزاري د 2 خارج القطر 2016

س5: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \forall x\geq 0\\ 2x & \forall x<0\end{cases}$ فأوجد $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

وزاري د 1 2014 د 1 خارج القطر 2016

التكامل غير المحدد

إذا كانت للدالة f المستمرة على الفترة $[a,b]$ دالة مقابلة F فإنه يوجد عدد لا نهائي من الدوال المقابلة للدالة f وكل منها يساوي $F+C$ حيث C يمثل عدد ثابت والفرق بين أكثر من اثنين منها يساوي عدد ثابت.

- تسمى مجموعة الدوال المقابلة $F+C$ بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على الفترة $[a,b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$ إذا كان رمز متغير الدالة هو x.
- يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد على صورة:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad , \quad C\in\mathbb{R}$$

- عملية التكامل غير المحدد هي العملية المعاكسة لعملية التفاضل أي أحداهما تنهي دور الأخرى.



«الرياضيات فنّ إعطاء الاسم نفسه لأشياء مختلفة.»

هنري بوانكاريه
العلم والمنهج

مثال: أوجد تكامل الدوال الآتية:

(a) $\int (3x^2 + 2x + 1)\, dx$

(b) $\int (\cos x + x^{-2})\, dx$

(c) $\int (x + \sec x \tan x)\, dx$

(d) $\int \sin(2x + 4)\, dx$

(e) $\int (\csc 3x \cot 3x)\, dx$

(f) $\int (\sin ax + \sec^2 3x)\, dx$

نلاحظ أن كل قوس مرفوع إلى أس يجب اتباع ما يأتي:

أ) نرتب حدود القوس. ب) يجب أن تكون مشتقة داخل القوس موجودة. ج) عند التكامل نقوم بحذف المشتقة.

مثال: جد التكامل $\int (x^2+3)^2(2x)\,dx$

ملاحظة: $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ ، $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

مثال: جد التكامل $\int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)\,dx$

مثال: جد التكامل لكل مما يأتي:

a) $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

b) $\int \tan^6 x \sec^2 x\,dx$

مثال: جد التكامل $\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$

مثال: جد التكامل $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$

في الدوال المثلثية علينا مراعاة ما يأتي:

1. نرتب بحيث نضع الدالة المثلثية ثم المشتقة.
2. يجب أن تكون المشتقة للدالة المثلثية موجودة.

مثال: جد تكامل:

1. $\int x^2 \sin x^3 \, dx$

وزاري د 3 2017 د 1 تطبيقي 2023

2. $\int \sin x \cos^5 x \, dx$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\tan x}}$

4. $\int \tan x \sec^4 x \, dx$

5. $\int \tan^6 x \sec^2 x \, dx$

6. $\int x\sqrt{x+3}\, dx$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

1. $\int \sec^2\theta\, d\theta$

2. $\int \csc^2\theta\, d\theta$

3. $\int \tan^2\theta\, d\theta$

4. $\int \cot^2\theta\, d\theta$

5. $\int \sin^2\theta\, d\theta$

6. $\int \cos^2\theta\, d\theta$

7. $\int \sin(ax+b)\, dx$

8. $\int \cos(ax+b)\, dx$

مثال: جد تكاملات كل مما يأتي:

1. $\int 9 \sin 3x \, dx$

2. $\int x^2 \sin x^3 \, dx$

وزاري 2017 د 3 2023 د 1 تطبيقي

3. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx$

وزاري 2013 د 1 خارج القطر 2014 د 4 أسئلة الأنبار 2017 د 1 أسئلة الموصل 2019 د 2 تطبيقي
2020 د 2 تطبيقي 2023 د 2 تطبيقي

4. $\int \sin^4 x \, dx$

وزاري 2000 د 1 2020 د 1 تطبيقي

5. $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) \, dx$

متابعة السؤال

مثال: جد تكاملات كل مما يأتي:

6. $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\,dx$

وزاري 2017 د 3 أسئلة الموصل | 2018 د 2 | 2023 تمهيدي تطبيقي

7. $\int \cos^3 x\,dx$

وزاري 2008 د 2 خارج القطر | 2019 د 3

8. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

وزاري 2020 د 3 تطبيقي | 2021 تمهيدي تطبيقي

9. $\int \sin 6x \cos^2 3x\,dx$

وزاري 2014 د 3 | 2016 د 1 | 2020 د 1

10. $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx$

وزاري 2014 د 1 | 2015 د 1 | 2019 د 1 خارج القطر تطبيقي | 2020 د 2

متابعة السؤال

مثال: جد تكاملات كل مما يأتي:

11. $\int \sin^2 3x \, dx$

12. $\int \cot^2 5x \, dx$

13. $\int \tan^2 7x \, dx$

14. $\int \sin 4x \cdot \cos^2 2x \, dx$

15. $\int \cos 2x \cdot \sin^2 x \, dx$

وزاري د 1 1997

مثال: جد تكامل $\int \cos^3 x \, dx$

وزاري د 2 خارج القطر 2008 د 3 2019

مثال: جد تكامل $\int (\cos^2 x)^2 \, dx$

مثال: جد تكامل $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) \, dx$

وزاري د 1 خارج القطر 2017

مثال: جد تكامل $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{1-\cos x}$

وزاري د 3 تكميلي 2023

مثال: جد تكامل $\int \sqrt{1 + \sin 2x} \, dx$

مثال: جد تكامل $\int \sqrt[3]{x^3 + 2x^5} \, dx$

تمارين (4 - 4)

جد تكاملات كل مما يأتي ضمن مجال الدالة:

1)

$$\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx$$

2) $$\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx$$

وزاري 2019 د 2 تطبيقي

3)

وزاري 2010 تمهيدي 2014 د 1 خارج القطر 2021 د 2 أحيائي

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,dx$$

4) $$\int \csc^2 x \cos x\,dx$$

وزاري 2013 د 1

5)

$$\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx$$

6) $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx$

وزاري د 3 2020 تطبيقي د 3 2023 تمهيدي 2025

7)

$$\int \sin^3 x\,dx$$

8) $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

لو كان السؤال أعلاه بالشكل التالي: $\int \frac{\sin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

9) $\int (3x^2+1)^2\,dx$

10) $\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

لو كان السؤال أعلاه بالشكل التالي: $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

وزاري 2019 د 2 2025 د 1

11) $\int (1+\cos 3x)^2\,dx$

وزاري 1997 د 2 2013 د 2 2025 د 2

12) $\int \sec^2 4x\,dx$

13) $\int \csc^2 2x\, dx$

14) $\int \tan^2 8x\, dx$

15) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}\, dx$

وزاري د 1 2016 د 3 خارج القطر 2016 تمهيدي 2017 د 2 2020

16) $\int \cos^2 2x\, dx$

17) $\int \sin^2 8x\, dx$

وزاري تمهيدي أحيائي 2023 تمهيدي 2025

18) $\int \cos^4 3x\, dx$

وزاري د 1 2024 د 1 محاولات أحيائي 2024

اللوغاريتم الطبيعي

لتكن u دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x فإن مشتقة اللوغاريتم الطبيعي للدالة u هي:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة}} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}}$$

وعليه فإن:

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + c}$$

شرط أن تكون الدالة (u) موجبة. وتستخدم هذه الدالة في توفير المشتقة الأولى في بعض الدوال التي يصعب اشتقاقها وهي تملك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل:

$$\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y} \quad , \quad \boxed{\ln(x^y) = y \ln x} \quad , \quad \boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y} \quad , \quad \boxed{\ln 1 = 0}$$

مثال: إذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: إذا كان $y = \ln(\sin x)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: إذا كان $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: إذا كان $y = \ln(\tan x + x^2)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: إذا كان $y = \ln(\ln x)$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: إذا كان $y = \ln 3x$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

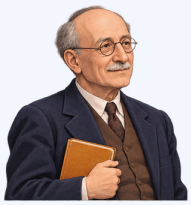
مثال: جد مشتقة الدوال التالية:

1. $y = \ln(x \sin x)$

2. $y = \ln(xy^2)$

3. $y = (\sin x)^x$

تعريف: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ أي إذا كان المقام أسه (1) ومشتقته موجودة بالبسط فيكون تكامل ln.



«هل استخدمت جميع المعطيات؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

مثال: جد تكامل كل مما يأتي:

1. $\int \frac{dx}{x+1}$

2. $\int \frac{4x+1}{2x^2+x}\,dx$

3. $\int \cot x\,dx$

4. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

5. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\sin\theta}$

الدالة الأسية (دالة اللوغاريتم الطبيعي العكسية)

الدالة الأسية e^u هي دالة عكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعي؛ بمعنى آخر هناك بعض الدوال عندما نشتقها أو نكاملها ندخل عليها الدالة الأسية ثم عندما ننتهي نقوم بإلغاء الدالة الأسية عن طريق إدخال دالة اللوغاريتم الطبيعي، الهدف من هذه العملية هي لتغيير شكل الدالة المراد العمل عليها.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^u) = (\text{الدالة})(\text{مشتقة الأس}) = e^u\frac{du}{dx}}$$

وعليه فإن $\boxed{\int e^u\,du = e^u + c}$ وهي تمتلك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل:

$\boxed{e = 2.71828}$, $\boxed{e^x \cdot e^y = e^{x+y}}$, $\boxed{\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}}$, $\boxed{e^0 = 1}$, $\boxed{\frac{1}{e^x} = e^{-x}}$

مثال: لتكن $y = e^{\tan x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: جد $\int xe^{x^2}\,dx$

وزاري د 3 2013

الدالة الأسية (الأساس عدد ثابت)

نفرض أن a عدد ثابت يمثل أساس الدالة الأسية فإن مشتقة أي دالة أسية مرفوعة لقوة u هي:

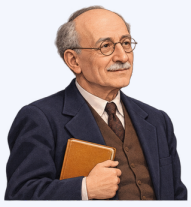
$$\frac{d}{dx}a^u = (\text{الدالة})(\ln \text{الأساس})(\text{مشتقة الأس}) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

وعليه فإن:

$$\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + c$$

(وردت e^u سهواً في الأصل والصحيح a^u).

وتتميز ببعض الخصائص التي ذكرناها في الدالة الأسية السابقة وسوف نوضح ذلك في المثال التالي:



«في حلّ كل مسألة قدرٌ من الاكتشاف.»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

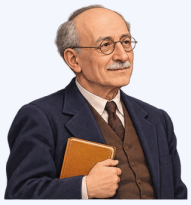
مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1. $y = 4^{x^2-3}$

2. $y = 5^{\sin x}$

3. $y = (12)^{x^{\frac{1}{3}}}$

4. $y = 7^{-\frac{x}{3}}$



«هل يمكنك التحقّق من النتيجة؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1. $y = e^{x^2+x}$

2. $y = e^{\sin x}$

3. $y = e^{-x}$

4. $y = \ln x \cdot e^{x}$

5. $y = \sin(xe^{x})$

6. $y = 3^{(2+4^{x})}$

7. $y = \cot e^{2x}$

8. $y = 5^{\sin x}$

مثال: جد تكامل لكل مما يأتي:

1. $\int e^{x^2+x}(2x+1)\,dx$

2. $\int e^{\sin x}(\cos x)\,dx$

3. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

4. $\int (1+e^x)^2\,dx$

5. $\int e^{\tan x}\cdot \sec^2 x\,dx$

6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$

وزاري 2011 د 1 | 2016 د 3 | تمهيدي 2025

7. $\int \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx$

متابعة السؤال

مثال: جد تكامل لكل مما يأتي:

8. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

9. $\int 4^x\,dx$

10. $\int 3^{\tan 7x}(\sec^2 7x)\,dx$

تمارين (5 - 4)

س1 / جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $y = \ln 3x$

b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \ln x^2$

متابعة السؤال

س1 / جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

d) $y = (\ln x)^2$

وزاري د 3 محاولات 2024

e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3$

f) $y = \ln(2 - \cos x)$

وزاري تمهيدي 2025

g) $y = e^{-5x^2+3x+5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}}$

i) $y = 7^{-\frac{x}{4}}$

j) $y = x^2 e^x$

س2 / جد التكاملات الآتية:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$

b)

وزاري تمهيدي 2012 تمهيدي 2015 د 3 2019 د 1 تطبيقي 2020 د 2 أحيائي 2022

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$$

c)

وزاري د 1 2012 د 1 2014 د 2 2016

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx$$

d)

وزاري تمهيدي أحيائي 2022

$$\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx$$

متابعة السؤال

س2 / جد التكاملات الآتية:

e)

وزاري د 1 2011 د 2 2013 تمهيدي 2016 تمهيدي تطبيقي 2023 د 3 تكميلي 2023

$$\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x \, dx$$

f)

وزاري د 2 2011 د 2 2025

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} \, dx$$

g)

وزاري د 1 خارج القطر 2012 د 2 2012 د 2 2015 د 2 أحيائي 2021 د 1 2024

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \, dx$$

h)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x \, dx}{2+\tan x}$$

متابعة السؤال

س2 / جد التكاملات الآتية:

i)

وزاري 2015 تمهيدي 2023 د 2 تطبيقي 2025 د 1

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$$

j)

وزاري 2020 تمهيدي تطبيقي

$$\int \cot^3 5x\, dx$$

k)

وزاري 2011 د 1 خارج القطر

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx$$

l)

وزاري 2014 د 1 خارج القطر 2024 د 1 محاولات تطبيقي

$$\int_1^2 xe^{-\ln x}\, dx$$

س3 / أثبت أن:

a) $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$

وزاري د 2 خارج القطر 2015 د 1 2019

b) $\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = 30$

وزاري د 3 2014 د 2 خارج القطر 2017 تمهيدي 2019 د 2 تطبيقي 2021 د 3 تكميلي 2023

س4 / $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فإذا كان $\int_1^6 f(x)\,dx = 6$ وكان $\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\,dx = 32$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

وزاري د 1 2016 د 2 2019 د 1 محاولات تطبيقي 2024



«عالم الرياضيات مثل الرسّام أو الشاعر، يصنع الأنماط.»

غودفري هاردي
دفاع عالم رياضيات

س5 / إذا علمت أن $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$ فجد قيمة $a \in \mathbb{R}$.

وزاري تمهيدي 2014 د 1 2015 د 3 2019 د 2 تطبيقي 2021 د 3 2024 د 3 محاولات 2024

س6 / لتكن $k \in \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2 + 2x + k$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) فجد $\int_1^3 f(x)\,dx$.

وزاري د 2 تطبيقي 2020

س7 / إذا كان المنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ له نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$.

وزاري د 4 أسئلة النازحين 2015 د 1 2017 د 1 خارج القطر 2019 د 2 أحيائي 2023

إيجاد مساحة المنطقة المستوية

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات

1. نساوي الدالة المعطاة بالصفر ثم نحل المعادلة لإيجاد قيم x ومن ثم يتحول السؤال إلى أحد الاحتمالات الخمسة التالية:
   - **أ-** إذا أعطيت الفترة $[a,b]$ في الدالة فنقوم بتصفير الدالة واستخراج قيم x فإذا كانت تنتمي إلى الفترة المعطاة فنقوم بتجزئة التكامل إلى جزئين أو أكثر. أما إذا كانت لا تنتمي لها فلا نجزئ التكامل ولكن في كلتا الحالتين نقوم بأخذ القيم الناتجة المطلقة للتكاملات.
   - **ب-** تعطى القيم على شكل $[a,b]$ مثلاً أو على شكل عبارة المستقيمين $x=a, x=b$ ويكون لها نفس التفسير السابق.
   - **ج-** إذا لم تُعطَ فترة أو مستقيمين في السؤال فإن قيم x الناتجة ترتب تصاعدياً واعتبارها قيم التكامل دون إهمال أي متجهة وهي على الأقل قيمتين.
   - **د-** إذا كان المطلوب إيجاد المساحة بين منحني ومحور السينات ومستقيم $x=a$ فقط، نقوم بإضافة هذه القيمة إلى القيم الناتجة من مساواة الدالة بالصفر ثم ترتب تصاعدياً واعتبارها فترة دون إهمال أي قيمة.
   - **هـ-** هناك بعض الدوال لا يمكن تحليلها لإيجاد قيمة x عند التصفير فإن المساحة تكون تكاملاً واحداً وعلى الفترة المعطاة.

مثال 1: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$.

وزاري تمهيدي 2007

مثال 2: جد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y=x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x=1, x=3$.

وزاري د 3 2013

مثال 3: جد المساحة المحددة بـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.

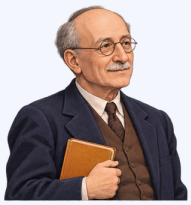
وزاري د 1 2013 د 3 تطبيقي 2023

مثال 4: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$.

مثال 5: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 3x^2 + 4$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1, 1]$.

«ما المجهول؟ وما المعطيات؟ وما الشرط؟»

جورج بوليا
كيف تحلّها؟



مثال 6: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

وزاري تمهيدي أحيائي 2021

مثال 7: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$.

واجبات H.W

- **س1 / واجب:** جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 4x$ ومحور السينات على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 1 2007 د 1 2018

- **س2 / واجب:** جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \cos 2x$ ومحور السينات ضمن الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 2 2003

- **س3 / واجب:** جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 3x^2 - 6x$ ومحور السينات.

المساحة المحددة بمنحنيين

إذا علمت معادلتي منحني $f(x), g(x)$ المعرفتين على الفترة $[a, b]$ وكان المطلوب إيجاد المساحة بينهما فنقوم بإيجاد الدالة المولدة وهي $h(x) = f(x) - g(x)$ مع مراعاة الاحتمالات الخمسة سابقة الذكر بالنسبة للدالة المولدة $h(x)$:

$$A = \left| \int_a^b h(x)\, dx \right|$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة المولدة لها أكثر من صورة واحدة فيمكن إجراء التكامل على أي صورة منها ما لم نضرب بعدد أو نقسم على عدد أو نرفع الطرفين إلى قوة معينة كأن تكون تربيع أو جذر.

مثال: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$.

وزاري د 1 2011

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$.

وزاري تمهيدي 2015 د 3 2017 د 3 تطبيقي 2019

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos x$ ، $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري تمهيدي خارج القطر 2014 د 2 2017 د 2 خارج القطر 2017 د 1 تطبيقي 2019 د 2 تطبيقي 2021
تمهيدي تطبيقي 2023 د 1 تطبيقي 2023 د 3 تكميلي 2023

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = \cos x$ ، $y = -\sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = \sin 2x$ ، $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 2 2005

المسافة

المسافة: ويرمز لها بالرمز (d) وهي كمية غير متجهة، أما الإزاحة فهي $S(t)$ والسرعة $V(t)$ والتعجيل $a(t)$ وهي كميات متجهة لذلك فإن:

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |V(t)|\, dt \quad , \quad S(t) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt \quad , \quad V(t) = \int a(t)\, dt$$

ملاحظة:

1. أقصى مسافة يصل إليها الجسم عند السرعة $0 =$.
2. بُعد الجسم بعد مرور 3 sec من البدء بالحركة: $[0, 3]$.

ملاحظات:

1. إذا كانت $V(t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم فإن المسافة المقطوعة في الثانية t هي $d = \left|\int_{t-1}^{t} V(t)\,dt\right|$ فمثلاً إذا طُلب في السؤال جد المسافة خلال الثانية الثامنة يعني حساب $\int_{7}^{8}$.
2. إذا كانت $V(t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم بعد مرور t ثانية من بدء الحركة فإن بعد الجسم هو $S = \int_{0}^{t} V(t)\,dt$.
3. وإذا كانت $a(t)$ تمثل تعجيل جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t)$ فإننا (نكامل بالتكامل غير المحدد):

$$\int a(t)\,dt = V(t) + c$$

4. الإزاحة هي تكامل محدد للسرعة ولا نأخذ المطلق لأن الناتج لا يهم إذا كان موجب أو سالب أو صفر.
5. أقصى سرعة يصل إليها الجسم عندما يكون التعجيل $0 =$.

مثال: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4$ m/s فجد:

- **أ) المسافة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$:**

- **ب) الإزاحة المقطوعة بالفترة $[1, 3]$:**

- **ج) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة:**

- **د) بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة:**

مثال: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18\ m/s^2)$ سرعته قد أصبحت $(82\ m/s)$ بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة. أحسب:

1. المسافة خلال الثانية الثالثة.

2. بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني.

3. جد السرعة بعد مرور 10 ثواني.

تمارين (6 - 4)

1) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$ ، $x = -1$.

وزاري د 1 محاولات تطبيقي 2024

2) جد المساحة المحددة للدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2, 3]$ وعلى محور السينات.

3) جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات.

وزاري د 3 2020 تمهيدي تطبيقي 2022 د 3 2024 د 3 محاولات 2024

4) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 2 تطبيقي 2020

5) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

وزاري د 1 خارج القطر 2016

6) جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \frac{1}{2}x$ ، $y = \sqrt{x-1}$ وعلى الفترة $[2, 5]$.

7) جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^4 - 12$ ، $y = x^2$.

وزاري د 2 1997 د 1 2008 د 1 خارج القطر 2008 2015 د 1 خارج القطر 2015 2015 د 3 خارج القطر 2016

8) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$ ، $g(x)=\sin x\cos x$ **حيث** $x\in[0,2\pi]$.

وزاري د 2 1998 د 1 2004 تمهيدي 2009 د 1 2014 د 1 خارج القطر 2015 د 2 أحيائي 2021 د 1 2024

د 1 محاولات أحيائي 2024

9) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=2\sin x+1$ ، $g(x)=\sin x$ **حيث** $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$.

وزاري د 2 2013 د 1 أسئلة النازحين 2015

10) جد المساحة المحددة بالدالة $y=x^3+4x^2+3x$ **ومحور السينات.**

وزاري د 1 2005 د 1 خارج القطر 2019 د 2 2019



«أجمل الأفكار وأعظمها هي أفكار الشباب التي صقلها الزمن والتجربة.»

صوفي جيرمان

الأعمال الفلسفية

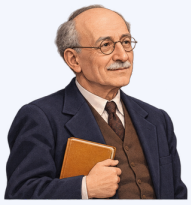
11): جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (3t^2 - 6t + 3)$ m/s إحسب:

وزاري د 1 2015

- **a)** المسافة المقطوعة في الفترة $[2, 4]$

- **b)** الإزاحة في الفترة $[0, 5]$

وزاري تمهيدي تطبيقي 2021



«هل تستطيع أن تحلّ جزءًا من المسألة؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

12) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ \text{m/s}^2$ **وكانت سرعته بعد مرور** (4) **ثواني تساوي** $90\ \text{m/s}$ **إحسب:**

وزاري د 2 2011 د 3 2016 د 1 2019 د 2 تطبيقي 2021

- **a)** السرعة عندما $t = 2$

- **b)** المسافة خلال الفترة $[1, 2]$

- **c)** الإزاحة بعد 10 ثواني من بدء الحركة



«بالمنطق نبرهن، وبالحدس نبتكر.»

هنري بوانكاريه

قيمة العلم

13): تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)$ m/s أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة إلى موضعها الأول الذي بدأت منه ثم إحسب التعجيل عندها.

وزاري تمهيدي 2007 د 2 2014 د 2 2016 د 2 2018 د 1 2024 د 3 محاولات

الحجوم الدورانية

1. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ إلى $x = b$ حول محور السينات نطبق العلاقة:

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

2. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y = a$ إلى $y = b$ حول محور الصادات نطبق العلاقة:

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

مثال: المنطقة المحددة بين المنحني $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها.

وزاري د 1 خارج القطر 2011

مثال: المنطقة المحددة بين المنحني $1 \leq y \leq 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات جد حجمها.

وزاري تمهيدي 2025

مثال: جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول محور الصادات دورة كاملة.

وزاري د 1 2013 د 1 خارج القطر 2015 د 1 خارج القطر 2016

مثال: أوجد حجم الشكل الناتج من دوران القطع المكافئ $x = 2y^2$ ومحور الصادات ضمن الفترة $y = 0,\ y = 2$.

مثال: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني.

وزاري د 2 2011 د 1 خارج القطر 2012 تمهيدي 2014 تمهيدي 2015 د 3 2018 د 1 خارج القطر تطبيقي 2019 د 2 2025

مثال: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0, x = 5$ حول المحور السيني.

وزاري تمهيدي 2012 تمهيدي 2019

مثال: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16, y = 0$ حول المحور الصادي.

وزاري تمهيدي 2017

مثال: أوجد حجم المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $y = 1, y = 2$ ومحور الصادات دورة كاملة حول المحور الصادي.

وزاري د 3 2015

تمارين (7 - 4)

س1: أوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1, x = 2$ حول المحور السيني.

س2: أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي.

وزاري د 1 2013 د 1 خارج القطر 2015 د 1 خارج القطر 2016

س3: إحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي.

س4: أحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني.

وزاري د 2 2014 | د 1 أسئلة الموصل 2017 | د 2 2017

الأسئلة الوزارية حول التكامل

وزاري: جد ناتج:

د 1 1996

1. $\int (\sin x - 3\sec^2 x)\, dx$

2. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx$

3. $\int \cos 6x \cos 3x\, dx$

وزاري: جد ناتج:

د 2 1996

$\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)\, dx$

وزاري: جد ناتج:

د 1 1997

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx$$

وزاري: جد ناتج:

د 1 1997

$$\int \cos 2x \sin^2 x\,dx$$

وزاري: جد ناتج:

د 2 1997 د 2 2013 د 2 2025

$$\int (1+\cos 3x)^2\,dx$$

وزاري: جد ناتج:

د 1 1998

$$\int (\cos x - \sin 2x)^2 \, dx$$

وزاري: س: إذا كان $\int_{-1}^{a} (x - x^3) \, dx = \frac{-9}{4}$ ما قيمة $a \in \mathbb{R}^+$؟

د 1 1998

وزاري: س: إذا كان $\int_{a}^{b} (2x + 3) \, dx = 12$ وكان $a + 2b = 3$ ما قيمة $a, b \in \mathbb{R}$؟

د 2 1998

وزاري: س: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحور السينات وعلى $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

د 2 2000 | د 1 2001 | د 1 2006 | د 2 2016 | د 2 2018 | د 2 2025

وزاري: جد ناتج:

د 1 2001

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

وزاري: جد ناتج:

د 2 2001

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9 - 12x + 4x^2}$$

وزاري: س: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3 - 9x$ ومحور السينات والفترة $[-3, 3]$؟

د 1 2001 | تمهيدي 2006 | د 1 2015

وزاري: س: جد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)\,dx$.

د 1 2001

وزاري: س: جد المساحة المحددة لمنحني الدالتين $y=x^4-4$ ، $y=3x^2$.

د 1 2002 د 2 2002

وزاري: س: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y=x^2$ ، $y=2x$ وعلى $[1,3]$.

د 1 2002

وزاري: س: إذا كان $\int_h^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=2$ جد قيمة h.

د 1 2004

وزاري: جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(5-2x)^2}$

د 1 2006

وزاري: جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$

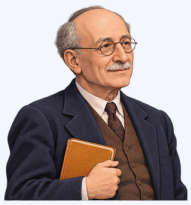
د 2 2006

وزاري: س: إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx = 5$ ، $\int_c^b f(x)\,dx = 3$ وكانت $c \in [a,b]$ جد قيمة $\int_a^c f(x)\,dx$.

د 1 2008

وزاري: جد $\int \cos^2 2x \sin x\,dx$

د 2 2008 د 1 2008



«هل تعرف نظرية يمكن أن تفيدك؟»

جورج بوليا

كيف تحلّها؟

وزاري: س: جسم يتحرك بسرعة $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ في أي زمن t احسب:

د 1 2009 د 2 2024

1. المسافة المقطوعة خلال الفترة $[0, 2]$.

2. الزمن الذي يصبح فيه التعجيل $18\ \text{m/min}^2$.

وزاري: جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3 + x^2}}\, dx$

د 2 2008 د 2 2009

وزاري: جد المساحة المحددة بين المنحنيين $y = \cos^2 x$ ، $y = \sin^2 x$ في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

د 2 2009

وزاري: س: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث سرعته $v = 3t^2 + 4t + 7$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها علماً أن المسافة تقاس بالأمتار.

2010

وزاري: س: جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = (x-1)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 3]$.

د 1 2012

وزاري: س: جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين $y = x^2 + 1$ والمستقيمين $y = 1, y = 2$ حول المحور الصادي.

د 1 2012

التمارين العامة الخاصة بالفصل الرابع

س13 / جد تكاملات كل مما يأتي:

a) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$

وزاري د 1 خارج القطر 2017

b) $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\, dx$

متابعة السؤال

س13 / جد تكاملات كل مما يأتي:

c) $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

d) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

e) $\int \cot x \csc^3 x\,dx$

وزاري 2012 د 2

f) $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\,dx$

وزاري 2019 د 1 تطبيقي

g) $\int \frac{1}{x^2 - 14x + 49}\,dx$

h) $\int \sec^2 3x \cdot e^{\tan 3x}\,dx$

وزاري تمهيدي 2018 د 1 2019 د 1 محاولات تطبيقي 2024

تذكير ببعض قوانين الدوال المثلثية

القانون (1)	القانون (2)	القانون (3)
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$	$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$
$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$	$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$	$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

تدريب وزاري مختار

المجاميع العليا والسفلى

سؤال 1 لتكن $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3x - 2$، جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^5 f(x)\,dx$ إذا تجزأت الفترة إلى الفترات $[1,2], [2,3], [3,5]$.

وزاري د 3 2019

التكامل المحدد وخواصه

سؤال 2 جد قيمة التكامل: $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5}\, dx$.

وزاري د 2 2003 د 1 خارج القطر 2015

سؤال 3 إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-3,5]$ وكان $\int_{1}^{5} f(x)\, dx = 12$ و $\int_{-3}^{5} [f(x) + 2x]\, dx = 54$، فجد $\int_{-3}^{1} f(x)\, dx$.

وزاري د 1 2024 د 1 محاولات أحيائي 2024

التكامل غير المحدد

سؤال 4 جد قيمة التكامل: $\int x^5 \left(\frac{2}{x} - 3x\right)^4 dx$.

وزاري د 3 أحيائي 2023

تكامل الدوال المثلثية

سؤال 5 جد تكامل: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

وزاري د 2 أحيائي 2023

سؤال 6 جد قيمة التكامل: $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$.

وزاري د 1 2025

مساحة المنطقة المستوية

سؤال 7 إذا كان لمنحني الدالة $y = ax^3 + bx$ نهاية عظمى محلية هي $(-1, 2)$، جد $a, b \in \mathbb{R}$، ثم احسب المساحة المحددة بين هذا المنحني ومحور السينات.

وزاري د 1 أحيائي 2023

سؤال 8 جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^4 - 8$، $y = 2x^2$.

وزاري تمهيدي 2012

المسافة والإزاحة

سؤال 9 جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t - 6)$ m/s، جد:

وزاري د 2 تطبيقي 2019

1) المسافة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$.

2) الإزاحة المقطوعة في الثانية الخامسة.

3) بعده بعد مضي 4 ثوانٍ من بدء الحركة.

1)

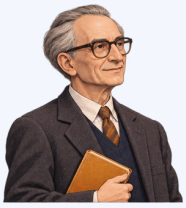
2)

3)

الحجوم الدورانية

سؤال 10 جد الحجم الناتج من دوران الدائرة $x^2 + y^2 = 9$ حول محور السينات ومركزها نقطة الأصل.

وزاري د 1 تطبيقي 2017



«مصدر الرياضيات العظيمة هو الحالة الخاصة، المثال الملموس.»

بول هالموس

أريد أن أكون عالم رياضيات